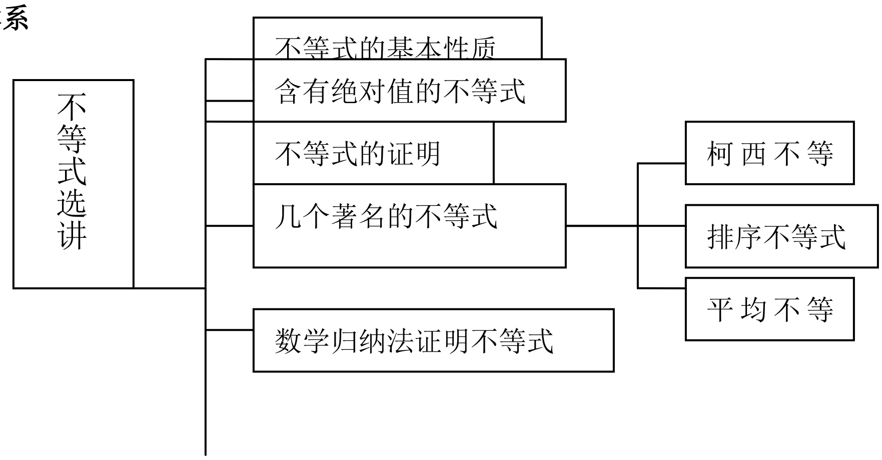
知识体系



第一节　不等式和绝对值不等式

最新考纲

1. 理解绝对值的几何意义，并了解下列不等式成立的几何意义及取等号的条件：

$|a+b|\leqslant|a|+|b|(a,b\in R)$；　$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|(a,b\in R)$.

2. 会利用绝对值的几何意义求解以下类型的不等式:

$|ax+b|\leqslant c$；$|ax+b|\geqslant c$；$|x-a|+|x-b|\geqslant c$.

基础热身

基础梳理

1. 实数的运算性质与大小顺序的关系

数轴上右边的点表示的数总大于左边的点所表示的数，从实数的减法在数轴上的表示可知：

$a>b\Leftrightarrow a-b>0$;$a=b\Leftrightarrow a-b=0$;$a<b\Leftrightarrow a-b<0$.

得出结论：要比较两个实数的大小，只要考察________________________即可.

2. 不等式的基本性质

(1)如果 a>b，那么_____；如果 b<a，那么______，即 $a>b\Leftrightarrow$ ______.(对称性)

(2)如果 a>b，且 b>c，那么______，即 a>b，$b>c\Leftrightarrow$ _______.

(3)如果 a>b，那么______，即 $a>b\Leftrightarrow$ _______.

推论：如果 a>b，且 c>d，那么______,即 a>b，　$c>d\Leftrightarrow$ ______.

(4)如果 a>b，且 c>0，那么______；如果 a>b，且 c<0，那么_____.

(5)如果 a>b >0，那么_____(n∈N，且 n>1).

(6)如果 a>b >0，那么_____(n∈N，且 n>1).

3. 基本不等式

如果 a,b∈R，那么_____（当且仅当 a=b 时取“=”);

如果 a,b∈R+，那么_____（当且仅当 a=b 时取“=”);

如果 a,b,c∈R+，那么_____（当且仅当 a=b=c 时取“=”);

如果 a,b,c∈R+，那么_____（当且仅当 a=b=c 时取“=”）.

4. 算术-几何平均不等式

(1)如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R+$, n>1 且 n∈N*, 则 $\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$ 叫做这 n 个正数的算术平均

数，$\sqrt[n]{a_1a_{2+}\cdots\cdots a_n}$ 叫做这 n 个正数的几何平均数；

(2)基本不等式：________≥________（n∈N*,ai∈R+,1≤i≤n).

5. 含有绝对值的不等式有两种基本的类型

（1）设 a 为正数,根据绝对值的意义，不等式|x|<a 的解集是____，它的几何意义就是______.

（2）设 a 为正数,根据绝对值的意义，不等式|x|>a 的解集是____，它的几何意义就是______.

基础达标

1. 命题p:若a,b∈R,则|a|+|b|>1是|a+b|>1的充分而不必要条件;命题q:函数y=$\sqrt{|x-1|-2}$的定义域是(-∞,-1]∪[3,+∞)，则命题 p_____，q_____（填真或假）.

2. 不等式$2^{x^2-2x-3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$的解集为________.

3. 不等式|x+$\log_3 x$|＜|x|+|$\log_3 x$|的解集为________.

4. 已知不等式|2x－t|+t－1＜0 的解集为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 t=________.

5. 已知函数 f（x）=$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-ax+3a\right)$在［2，+∞）上是减函数，则实数 a 的范围是______.

6. 把长为 12 cm 的细铁丝截成两段，各自围成一个正三角形，那么这两个正三角形面积之和的最小值是_____.

互动学案

典例分析

【例 1】解不等式|5x+1|>2-x.

举一反三

1. 如果对任意实数 x，不等式|x+1|≥kx 恒成立，则实数 k 的取值范围是______.

【例 2】已知|x-a|<$\frac{\varepsilon}{2m}$,0<|y-b|<$\frac{\varepsilon}{2|a|}$,y∈(0,m)，求证:|xy-ab|<ε.

证明 由$|xy-ab|=|xy-ay+ay-ab|=|y(x-a)+a(y-b)|\le|y(x-a)|+|a(y-b)|$

$=|y||x-a|+|a||y-b|<m\times\frac{\varepsilon}{2m}+|a|\times\frac{\varepsilon}{2|a|}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,命题得证.

举一反三

2. 三个同学对问题“关于 x 的不等式x^2＋25＋|x^3－5x^2|≥ax 在[1，12]上恒成立，求实数的取值范围”提出各自的解题思路.

甲说：“只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值”.

乙说：“把不等式变形为左边含变量 x 的函数，右边仅含常数，求函数的最值”.

丙说："把不等式两边看成关于 x 的函数，作出函数图象".

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论应为多少，即 a 的取值范围是_______.

易错警示

【例】对任何实数 x，若不等式 $|x+1|-|x-2|>k$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为.

错解 直接去掉绝对值，转化为（x-1）-（x-2）>k,得到 k<1.

错解分析 设 $y=|x+1|-|x-2|$，则原式对任意实数 x 恒成立的充要条件是 $k<y_{\min}$，于是题转化为求 y 的最小值.为了得到最小值就直接拿掉绝对值，没有进行分类讨论而导致错误.

正解 $|x+1|$、$|x-2|$ 的几何意义分别为数轴上点 x 到-1 和 2 的距离，$|x+1|-|x-2|$ 的几何意义为数轴上点 x 到-1 与 2 的距离之差，由数轴可得其最小值为-3，故 k<-3.

考点演练

1. 不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是______. 2. 不等式 $\left|\frac{x}{x+2}\right|>\frac{x}{x+2}$ 的解集为______.

3. 不等式 $|x-1|>|2x-3|$ 的解集是______. 4. 不等式 $|x-1|+|x+2|<5$ 的解集是_______.

5. 已知 $|a|<1$，若 $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1$，则 b 的取值范围是______.

6. 当 x∈［－1，2］时，不等式 $a\geqslant x^2-2x-1$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是______.

7. 若 $A=\{x||x-1|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-2}{x}>0\right.\right\}$，则 $A\cap B=$______.

8. 已知 $|a|\leqslant1$,函数 $f(x)=ax^2+x-a(-1\leqslant x\leqslant1)$,求证:$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}$.

9. 设 $|a|<1$, $|b|<1$,求证:$|a+b|+|a-b|<2$.

第二节证明不等式的基本方法

最新考纲

1. 会用比较法、综合法、分析法证明简单的不等式. 2. 会用反证法证明简单的不等式.

基础热身

基础梳理

不等式的证明方法（1）比较法：作差比较：______________.

作差比较的步骤：①______：对要比较大小的两个数（或式）作差；

②______：对差进行因式分解或配方成几个数（或式）的完全平方和；

③______：结合变形的结果及题设条件判断差的符号.

注意：若两个正数作差比较大小有困难，可以通过它们的平方差来比较大小.

（2）综合法：________.

（3）分析法：________.基本步骤：要证……只需证……，只需证…….

①"分析法"证题的理论依据：寻找结论成立的________.

②"分析法"证题是一个非常好的方法，但是书写不是太方便，所以我们可以利用______寻找

证题的途径，然后用______进行表达.

（4）反证法：正难则反.

利用反证法证明不等式，一般有下面几个步骤：

第一步：分清欲证不等式所涉及到的条件和结论；第二步：作出与所证不等式相反的假定；

第三步：从条件和假定出发，应用正确的推理方法，推出矛盾结果；

第四步：断定产生矛盾结果的原因，在于开始所作的假定不正确，于是原证不等式成立.

（5）放缩法：将不等式一侧适当地放大或缩小以达证题目的.

放缩法的方法有：①添加或舍去一些项，如：$a^2+1>|a|$；$n(n+1)>n$；

②将分子或分母放大（或缩小）；③利用基本不等式，如：$n(n+1)<\frac{n+(n+1)}{2}$；

④利用常用结论：

i．$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}$；

ii．$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\frac{1}{k^2}>\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$（程度大）；

iii．$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{(k-1)(k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$（程度小）．

基础达标

1. 设 $0<x<1$，则 $a=\sqrt{2x}$，$b=1+x$，$c=\frac{1}{1-x}$ 中最大的一个是______.

2. 函数 $y=\log_a(x+3)-1$ $(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 A，若点 A 在直线 $mx+ny+1=0$ 上，其中 $m,n>0$，则 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$ 的最小值为______.

3. 设正数 a、b、c、d 满足 $a+d=b+c$，且 $|a-d|<|b-c|$，则 ad 与 bc 的大小关系是______.

4. 若 $m<n$，$p<q$，且 $(p-m)(p-n)<0$，$(q-m)(q-n)<0$，则 m、n、p、q 的大小顺序是_______.

5. 如果 $0<a<1$，$0<x\leq y<1$，且 $\log_a x\log_a y=1$，那么 xy 的最大值是________.

互动学案

【例 1】设 $a>0,b>0$，求证：$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

分析　这个不等式两边都是 a,b 的多项式，通过作差可以合并一些项，然后因式分解，因此可尝试作差比较.

证明　$\because \dfrac{a^3+b^3}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3=\dfrac{4a^3+4b^3}{8}-\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8}=\dfrac{3(a-b)^2(a+b)}{8}\geqslant 0$，

$\therefore \dfrac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.

举一反三

1. 求证：当 $x\in R$ 时，$1+2x^4\geqslant 2x^3+x^2$.

【例 2】已知 a、b、c∈R+，且 a+b+c=1.求证：

（1+a）（1+b）（1+c）≥8（1－a）（1－b）（1－c）.

分析　在条件“a+b+c=1”的作用下，将不等式的“真面目”隐含了，给证明不等式带来困难，若用“a+b+c”代替“1”，则还原出原不等式的“真面目”，从而抓住实质，解决问题.

证明　∵a、b、c∈R+，且 a+b+c=1，

∴要证原不等式成立，

即证［（a+b+c）+a］•［（a+b+c）+b］［（a+b+c）+c］≥8［（a+b+c）－a］•［（a+b+c）－b］•［（a+b+c）－c］成立.

也就是证［（a+b）+（c+a）］［（a+b）+（b+c）］［（c+a）+（b+c）］≥8（b+c）（c+a）（a+b）成立.①

∵（a+b）+（b+c）≥$2\sqrt{(a+b)(b+c)}$＞0，（b+c）+（c+a）≥$2\sqrt{(b+c)(c+a)}$＞0，

（c+a）+（a+b）≥$2\sqrt{(c+a)(a+b)}$＞0，∴三式相乘得①式成立.

故原不等式得证.

举一反三

2. 已知 a>0, b>0, c>0, 且 a, b, c 不全相等. 求证：$\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c}$>a+b+c.

【例 3】设 a、b、c 均为正实数，求证：$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\geq\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}+\dfrac{1}{a+b}$.

分析　这个不等式是一个轮换式，观察其两边结构可联想(a+b)$\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$≥4 的等价形式：

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{4}{a+b}$，就找到了证题方法.

证明　∵a、b、c 均为正实数，∴$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}\right)\geq\dfrac{1}{a+b}$，当 a=b 时等号成立；

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{2c}\right)\geq\dfrac{1}{b+c}$，当 b=c 时等号成立；$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2c}+\dfrac{1}{2a}\right)\geq\dfrac{1}{c+a}$，当 c=a 时等号成立.

三个不等式相加即得 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\geq\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$，当且仅当 a=b=c 时等号成立.

举一反三

3. 设 a, b, c∈R+，且 a+b=c，求证：$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$.

【例 4】若 a, b, c, d∈R+，求证：$1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$.

分析 此不等式不宜使用作差比较法来证，主要是由于作差之后的分母太复杂，为了使分母相近我们可以通过减少或增加分母中的项，从而放大或缩小分式的值来达到证明的目的.

证明 记 m=$\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$.

∵a, b, c, d∈R+,

∴m>$\frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{c+d+a+b}+\frac{d}{d+a+b+c}$=1,

m<$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+c}$=2,

∴1<m<2, 即原式不等式成立.

举一反三

4. 已知 a>2, 求证：$\log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.

易错警示

【例】求证：$\sqrt{a^2+16}+\sqrt{(a-4+36)^2}\geq 2\sqrt{29}$.

错解设 p=(a, 4), q=(a−4, 6), 由|p|+|q|≥|p−q|得

$\sqrt{a^2+16}+\sqrt{(a-4+36)^2}$=|p|+|q|≥|p−q|=|(a, 4)−(a−4, 6)|=|(4, −2)|=$\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$.

∴ $\sqrt{a^2+16}+\sqrt{(a-4+36)^2}\geq 2\sqrt{5}$.

错解分析 向量不等式|p|+|q|≥|p−q|等号成立的条件是 p∥q, 且向量 p 与 q 方向相反, 而当 p∥q 时, 得 a=−8, 此时 p=(−8, 4), q=(−12, 6)方向相同, 故等号不成立.

正解设 p=(a, 4), q=(4−a, 6), 由|p|+|q|≥|p+q|, 得

$\sqrt{a^2+16}+\sqrt{(a-4+36)^2}$=|p|+|q|≥|p+q|

=|(a, 4)+(4−a, 6)|=|(4, 10)|=$\sqrt{16+100}=2\sqrt{29}$.

当 p∥q，即 a=$\frac{8}{5}$时, p, q 方向相同, 故等号成立.

考点演练

1. 已知 a、b 是不相等的正数，x=$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$，y=$\sqrt{a+b}$，则 x、y 的大小关系是_______.

2. 已知 x、y∈R，M=a^2+b^2+1，N=x+y+xy，则 M 与 N 的大小关系是________.

3. 若 a、b、c∈R, a>b，则下列不等式①$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；②$a^2>b^2$；③$\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$；④a|c|>b|c|，一定成立的序号是__________.

4. 若 a, b, c>0 且a^2+2ab+2ac+4bc=12，则 a+b+c 的最小值是_________.

5. 若不等式x^2＋ax＋1≥0 对于一切 x∈$\left(0,\frac{1}{2}\right)$成立，则 a 的取值范围是__________.

6. 若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$＜0，则下列不等式①a+b＜ab；②|a|＞|b|；③a＜b；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$＞2. 其中正确的不等式序号有__________.

7. 求证：$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$<2.

8. 已知 a＞b＞c 且 a+b+c=0，求证：$\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a$.

9. 已知 a、b、x、y∈R+且$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，x＞y. 求证：$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$.

第三节　柯西不等式与排序不等式、数学归纳法证明不等式

最新考纲

1. 认识柯西不等式的几种不同形式, 理解柯西不等式的几何意义, 并会证明.

（1）柯西不等式的向量形式：|α||β|≥|α·β|.

（2）$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$.

（3）$\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}+\sqrt{\left(x_2-x_3\right)^2+\left(y_2-y_3\right)^2}\geq\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$（通常称作平面三角不等式）.

2. 会用参数配方法讨论柯西不等式的一般情况：

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2.$$

3. 会用向量递归方法讨论排序不等式.

4. 了解数学归纳法的原理及其使用范围，会用数学归纳法证明一些简单问题.

5. 会用数学归纳法证明贝努利不等式：$\left(1+x\right)^n$>1+nx(x>-1, x≠0, n 为大于 1 的正整数)，了解当 n 为大于 1 的实数时贝努利不等式也成立.

6. 会用上述不等式证明一些简单问题，能利用基本不等式、柯西不等式求一些特定函数的极

值.

7. 了解证明不等式的基本方法：比较法、综合法、分析法、反证法、放缩法.

基础热身

基础梳理

1. 柯西不等式的代数形式

设 a, b, c, d 均为实数，则__________，其中等号当且仅当 ad=bc 时成立.

几何意义就是：|α||β|≥|α·β|，其中等号当且仅当________（即两个向量共线）时成立.

2. 柯西不等式的向量形式

设α，β为平面上的两个向量，则|α||β|≥|α·β|，其中等号当且仅当两个向量方向相同或相反（即两个向量共线）时成立.

3. 三角不等式

设 x_1, y_1, x_2, y_2 为任意实数，则：$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\ge\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

4. 柯西不等式的推广形式

设 n 为大于 1 的自然数，a_i, b_i（i=1，2，…，n）为任意实数，则____________________，其中等号当且仅当 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$ 时成立（当 ai=0 时，约定 b_i=0, i=1，2，…，n）.

5. 排序不等式

一般地，设有两组数：$a_1\le a_2\le a_3$，$b_1\le b_2\le b_3$，我们考察这两组数两两对应之积的和，利用排列组合的知识，我们知道共有 6 个不同的和数，它们是：

对应关系	和	备注
$(a_1,a_2,a_3)(b_1,b_2,b_3)$	$S_1=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$	顺序和
(a_1,a_2,a_3) (b_1,b_3,b_2)	$S_2=a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2$	乱序和
(a_1,a_2,a_3) (b_2,b_1,b_3)	$S_3=a_1b_2+a_2b_1+a_3b_3$	乱序和
(a_1,a_2,a_3) (b_2,b_3,b_1)	$S_4=a_1b_2+a_2b_3+a_3b_1$	乱序和

(a_1,a_2,a_3) (b_3,b_1,b_2)	$S_5=a_1b_3+a_2b_1+a_3b_2$	乱序和
(a_1,a_2,a_3) (b_3,b_2,b_1)	$S_6=a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$	反序和

根据上面的猜想，在这 6 个不同的和数中，应有结论：______最大，______最小.

6. 排序不等式的一般情形

一般地，设有两组实数：a_1,a_2,a_3，…，a_n 与 b_1,b_2,b_3，…，b_n，且它们满足：

$a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n$，$b_1\le b_2\le b_3\le\cdots\le b_n$，

若 $c_1,c_2,c_3\cdots c_n$ 是 $b_3,b_2,b_1\cdots$，b_n 的任意一个排列，则和数 $a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$，

a_1,a_2,a_3 在，…，a_n 与 b_1,b_2,b_3，…，b_n 同序时最大，反序时最小，即：____________

______________________________等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时成立.

基础达标

1. 若 $\log_x y=-2$，则 x+y 的最小值是______.

2. 若 x>1，则函数 y=$x+\frac{1}{x}+\frac{16x}{x^2+1}$ 的最小值为______.

3. 若 x, y, z 是正数，且满足 xyz(x+y+z)=1，则(x+y)•(y+z)的最小值为______.

4. 设 a, b, c∈R+，且 a+b+c=1，若 M=$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$，则 M 的取值范围是________.

5. 若 a, b∈R+，且 a≠b, M=$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$, N=$\sqrt{a}+\sqrt{b}$，则 M 与 N 的大小关系是________.

互动学案

典例分析

【例 1】已知 a, b, c 都是正数, 求证: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

分析 考虑到这是 a, b, c 轮换式, 因而可设 a≥b≥c, 则 a+b≥a+c≥b+c, 所以可尝试用排序不等式完成证明.

证明不妨设 a≥b≥c, 则 a+b≥a+c≥b+c,

从而 $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$.

由排序不等式顺序和不小于乱序和可知:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{b+c},$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{a+c}+\frac{a}{b+a}+\frac{b}{b+c},$$

两边分别相加即得: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

举一反三

1. 已知 a, b, c 为正数，且 a≥b≥c，求证：

$$\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

【例 2】已知 a, b, c 都为正数, 求证: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ≥a+b+c.

分析 此题可考虑用均值不等式或柯西不等式证明. 用基本不等式得 $\frac{a^2}{b}$ +b≥2a，同理得到其他两个同样的式子，将所得式子相加；而要用柯西不等式，则需配出两组平方数.

证明 方法一: 由 $\frac{a^2}{b}$ +b≥2a, $\frac{b^2}{c}$ +c≥2b, $\frac{c^2}{a}$ +a≥2c, 两边相加得 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ≥a+b+c.

方法二: 由柯西不等式 $\left[\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right]\times\left[\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2\right] \geq \left(c+a+b\right)^2$,

所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$ ≥a+b+c.

举一反三

2. （2008·南通模拟）已知 x, y, z 均为正数，求证：$\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

【例 3】已知实数 a, b, c, d 满足 a+b+c+d=3，$a^2+2b^2+3c^2+6d^2$ =5, 试求 a 的最值.

分析 要求出 a 的最值须建立 a 的不等式求解，我们可尝试利用与 b, c, d 有关的不等式.

解 由 柯 西 不 等 式 得 ， 有 $\left(2b^2+3c^2+6d^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) \geq \left(b+c+d\right)^2$ ， 即

$$2b^2+3c^2+6d^2 \geq \left(b+c+d\right)^2.$$

由条件可得，5-$a^2 \geqslant (3-a)^2$，解得 1≤a≤2,

当且仅当$\dfrac{\sqrt{2}b}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{3}c}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt{6}d}{\sqrt{\frac{1}{6}}}$时等号成立,

代入得 b=$\frac{1}{2}$，c=$\frac{1}{3}$，d=$\frac{1}{6}$时，$a_{\max}$=2；

b=1，c=$\frac{2}{3}$，d=$\frac{1}{3}$时，$a_{\min}$=1.

举一反三

3. 设 2x+3y+5z=29，求函数 u=$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{5z+6}$的最大值.

【例 4】求证：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$（其中 n∈N*）.

分析 因为这是与正整数 n 有关的命题，所以可用数学归纳法来证明.

证明 (1)当 n=1 时，左边=$\frac{1}{2}$，右边=$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，等式成立.

(2)假设当 n=k(k≥1，k∈N*)时，等式成立，即有

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$，

当 n=k+1 时，

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$.

这就是说，当 n=k+1 时，等式也成立.

根据(1)和(2)可知，等式对任何 n∈N*都成立.

举一反三

4. 用数学归纳法证明$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$∈N*）.

易错警示

【例】已知$a^2+b^2+c^2$=1，$x^2+y^2+z^2$=9，ax+by+cz≤t，求 t 的最小值.

错解 的最小值，即求 u=ax+by+cz 的最大值.

ax≤$\frac{a^2+x^2}{2}$，by≤$\frac{b^2+y^2}{2}$，cz≤$\frac{c^2+z^2}{2}$，三式相加得：

ax+by+cz≤$\frac{a^2+x^2}{2}+\frac{b^2+y^2}{2}+\frac{c^2+z^2}{2}$=5,

故 u=ax+by+cz 的最大值为 5，从而 t 的最小值为 5.

错解分析 基本不等式得到 u=ax+by+cz≤5 是正确的，但这只是能说明 u 的最大值有小于或等于 5 两种可能，并不能得出 u 的最大值一定是 5. 事实上，如果 u 的最大值为 5，错解中的三个不等式应同时取“=”，于是 a=x, b=y, c=z 从而得出 $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$，即 1=5，这是不可能的. 产生错解的原因是对最值的概念及基本不等式中的等号成立条件尚未掌握.

正解 柯西不等式得：

$u^2=(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=1\times9=9$. u=ax+by+cz≤3，故 u=ax+by+cz 的最大值为 3，从而 t 的最小值为 3.

考点演练

1. 设 a>b>c, n∈N，且 $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\ge\frac{n}{a-c}$ 恒成立，则 n 的最大值是______

2. 若 x∈(-∞, 1)，则函数 y=$\frac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 的最大值是______

3. 设 P=$\sqrt{2}$，Q=$\sqrt{7}-\sqrt{3}$，R=$\sqrt{6}-\sqrt{2}$，则 P, Q, R 的大小顺序是______

4. 设不等的两个正数 a, b 满足 $a^3-b^3=a^2-b^2$，则 a+b 的取值范围是______

5. 若实数 x, y, z 满足 x+2y+3z=a (a 为常数)，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为______

6. 若 a, b, c, d 是正数，且满足 a+b+c+d=4，用 M 表示 a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d 中的最大者，则 M 的最小值为______

7. 已知 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$, 求证：$a^2+b^2=1$.

8. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ∈N*，且各不相同，求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$

9. 已知函数 g(x)=x^2-2x (x≥1), f(x)=$(a+b)^x-a^x-b^x$, 其中 a、b∈R+, a≠1, b≠1, a≠b, 且 ab=4，对于任意 n∈N*，试指出 f(n) 与 g(2^n) 的大小关系，并证明你的结论.

参 考 答 案

选考 4-5

第一节

基础梳理

1. 它们的差的符号

2. (1)b<a a>b b<a(2)a>c a>c

(3)a+c>b+c a+c>b+c a+c>b+d a+c>b+d

(4)ac>bc ac<bc

(5) $a^n > b^n$ (6) $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

3. a^2+b^2 ≥2ab $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a^3+b^3+c^3$ ≥3abc $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

4. (2) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

5. (1){x|-a<x<a}数轴上到原点的距离小于 a 的点的集合是开区间(－a，a)(2){x|x>a 或 x<-a}数轴上到原点的距离大于 a 的点的集合是两个开区间(-∞,-a),(a,+∞)的并集

基础达标

1. 假 真 **解析**：∵|a+b|≤|a|+|b|，若|a+b|＞1，则一定有|a|+|b|＞1，
∴p 为假命题.

又∵函数 y= $\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域为

|x－1|－2≥0，
∴x≤－1 或 x≥3,∴q 为真命题.

2. {x|-3<x<2} **解析**：原不等式可化为 $2^{x^2-2x-3} < 2^{-3(x-1)}$,∵底数 2>1,

∴ x^2-2x-3<-3(x-1),整理得 x^2+x-6<0，解得不等式的解集为{x|-3<x<2}.

3. (0，1) **解析**：∵x＞0，且 x 与 $\log_3 x$ 异号，∴$\log_3 x$＜0，∴0＜x＜1.

4. 0 **解析**：∵|2x－t|＜1－t，即 t－1＜2x－t＜1－t，整理得 t－$\frac{1}{2}$＜x＜$\frac{1}{2}$，∴t=0.

5. (－4，4] **解析**：∵f(x)=$\log_{\frac{1}{2}}$(x^2-ax+3a)在[2，+∞)上是减函数，

∴u=x^2－ax+3a 在[2，+∞)上为增函数，且在[2，+∞)上恒大于 0，

∴$\begin{cases} \frac{a}{2} \leq 2 \\ 4-2a+3a>0 \end{cases}$，∴－4＜a≤4.

6. 23 cm^2 **解析**：设两段长分别为 xcm，(12－x)cm，

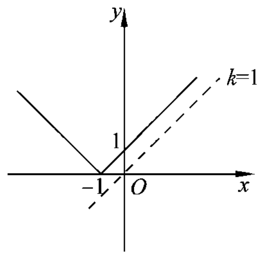
则 S=$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{12-x}{3}\right)^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{18}\left(x^{2}-12x+72\right)=\frac{\sqrt{3}}{18}\left[\left(x-6\right)^{2}+36\right]$

$\geqslant 2\sqrt{3}$.

举一反三

1. 0≤k≤1 **解析**：画出 y1=|x+1|，y2=kx 的图象，由图可看出 0≤k≤1.



2. (-∞, 10] **解析**：由 x^{2} +25+| x^{3} −5 x^{2} |≥ax, 1≤x≤12⇒x+ $\frac{25}{x}$ +| x^{2} -5x|≥a，而 x+ $\frac{25}{x}$ ≥2 $\sqrt{x\cdot\frac{25}{x}}$ =10，等号当且仅当 x=5∈[1, 12]时成立；且| x^{2} -5x|≥0，等号当且仅当 x=5∈[1, 12]时成立. 所以，a≤x+ $\frac{25}{x}$ +| x^{2} -5x|min=10，等号当且仅当 x=5∈[1, 12]时成立, 故 a∈(-∞, 10].

考点演练

1. {x|x≥−1} **解析**：|x+2|≥|x|⇔ $\left(x+2\right)^{2}\geqslant x^{2}$ ⇔4x+4≥0⇔x≥−1.

2. {x|-2<x<0} **解析**:原不等式等价于 $\frac{x}{x+2}$ <0⇔x(x+2)<0⇔-2<x<0.

3. $\left\{x\left|\frac{4}{3}<x<2\right.\right\}$ **解析**:原不等式 $\Leftrightarrow\left(x-1\right)^{2}>\left(2x-3\right)^{2}\Leftrightarrow\left(2x-3\right)^{2}-\left(x-1\right)^{2}<0\Leftrightarrow$

(2x-3+x-1)(2x-3-x+1)<0⇔（3x-4）(x-2)<0⇔ $\frac{4}{3}<x<2$

4. {x|-3<x<2} **解析**:当 x<-2 时，得 $\begin{cases}x<-2\\-\left(x-1\right)-\left(x+2\right)<5\end{cases}$ ，解得-3<x<-2；

当-2≤x≤1 时，得 $\begin{cases}-2\leq x\leq 1\\-\left(x-1\right)+\left(x+2\right)<5\end{cases}$,

解得-2≤x≤1；

当 x>1 时，得 $\begin{cases} x>1 \\ (x-1)+(x+2)<5 \end{cases}$，

解得 1<x<2.

综上，原不等式的解集为{x|-3<x<2}.

5.（-1, 1） **解析**：$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{1+ab}\right)^2<1 \Leftrightarrow (a+b)^2<(1+ab)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-1-a^2b^2$

$<0 \Leftrightarrow$（a^2-1）（b^2-1）>0.

∵|a|<1，∴$a^2<1$，∴$b^2-1<0$,

即-1<b<1.

6. a≥2 **解析**：当 x∈［－1，2］时，$x^2-2x-1=(x-1)^2-2\in$［－2，2］.

∵a≥x^2-2x-1 恒成立，∴a≥2.

7. {x|－1<x<0 或 2<x<3}

解析:∵A={x| －1<x<3}, B={x| x>2 或 x<0},

∴A∩B={x|－1<x<0 或 2<x<3}.

8. ∵ |a| ≤ 1,|x| ≤ 1, ∴ |f(x)|=|a x^2 +x-a|=|a(x^2 -1)+x| ≤ |a(x^2 -1)|+|x| ≤ $1-x^2+|x|=1-|x|^2+|x|\leqslant\frac{5}{4}$.

9. 当 a+b 与 a-b 同号时,

|a+b|+|a-b|=|a+b+a-b|=2|a|<2;

当 a+b 与 a-b 异号时,

|a+b|+|a-b|=|a+b-(a-b)|=2|b|<2.

综上可知,|a+b|+|a-b|<2.

第二节

基础梳理

（1）A-B≤0⇔A≤B①作差 ②变形

③判断差的符号（2）由因导果（3）执果索因①充分条件或者是充要条件

②分析法 综合法

基础达标

1. c **解析**：∵0<x<1，∴$1+x>2\sqrt{x}=\sqrt{4x}>\sqrt{2x}$.

又∵$1+x-\frac{1}{1-x}=\frac{1-x^2-1}{1-x}=-\frac{x^2}{1-x}<0$，

∴$1+x<\frac{1}{1-x}$，故 c 最大.

2. 8　**解析**：∵函数 $y=\log_a(x+3)-1(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点 A(-2,-1)，

∴(-2)・m+(-1)・n+1=0，即
2m+n=1，m,n>0，

∴$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(2m+n)=4+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n}\geq4+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}}=8$，

当且仅当 n=2m，即 $m=\frac{1}{4}$，$n=\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$有最小值 8.

3. ad＞bc　**解析**：$0\leqslant|a-d|<|b-c|\Leftrightarrow(a-d)^2<(b-c)^2\Leftrightarrow(a+d)^2-4ad<(b+c)^2-4bc$.∵a+d=b+c，∴－4ad＜－4bc，∴ad＞bc.

4. m＜p＜q＜n　**解析**：把 p、q 看成变量，则 m＜p＜n，m＜q＜n.

5. a^2　**解析**：∵$\log_a x+\log_a y\geq2\sqrt{\log_a x\log_a y}=2$，∴$\log_a xy\geqslant2$，∴$0<xy\leqslant a^2$.

举一反三

1. ∵$(1+2x^4)-(2x^3+x^2)$

$=x^4-2x^3+x^2+x^4-2x^2+1$

$=(x-1)^2\cdot x^2+(x^2-1)^2\geqslant0$,

∴$1+2x^4\geqslant2x^3+x^2$.

2. 要证$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$成立，只需证$\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)+\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)>2a+2b+2c$成立.

只需证$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}>2c$，$\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}>2a$，$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}>2b$成立.
上面的三个不等式显然成立，故原不等式成立.

3. ∵a,b,c∈R+，$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$，

∴$0<\frac{a}{c}<1$，$0<\frac{b}{c}<1$，$a^{\frac{2}{3}},b^{\frac{2}{3}},c^{\frac{2}{3}}>0$，

$\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}}=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=1$，$\therefore a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$.

4. ∵a>2, ∴a−1>1,

$\therefore \log_a(a-1)>0$, $\log_{a+1}a>0$.

$\because \frac{\log_a(a-1)}{\log_{a+1}a}=\log_a(a-1)\log_a(a+1)<\left[\frac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}\right]^2$,

又$\because \left[\frac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{\log_a(a^2+1)}{2}\right]^2<\left(\frac{\log_a a^2}{2}\right)^2=1$,

$\therefore \log_a(a-1)<\log_{a+1}a$.

考点演练

1. y＞x　**解析**：$\because x^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=\frac{1}{2}$（a+b+2$\sqrt{ab}$），

y^2=a+b=$\frac{1}{2}$（a+b+a+b）＞$\frac{1}{2}$（a+b+2$\sqrt{ab}$）=x^2，又∵x＞0，y＞0，∴y＞x.

2. M≥N　**解析**：M－N=x^2+y^2+1－（x+y+xy）

=$\frac{1}{2}$［（x^2+y^2－2xy）+（x^2－2x+1）+（y^2－2y+1)］

=$\frac{1}{2}$［$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2$］≥0，故M≥N.

3. ③　**解析**：应用间接排除法．取 a=1, b=0，排除①．取 a=0, b=−1，排除②．取 c=0，排除④．故应该选③, 显然$\frac{1}{c^2+1}$>0，对不等式 a>b 的两边同时乘以$\frac{1}{c^2+1}$，得$\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$成立.

4. $2\sqrt{3}$　**解析**：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2$＋2ab＋2ac＋2bc＝12＋$(b-c)^2$≥12，当且仅当b＝c 时取等号，即 a+b+c≥$2\sqrt{3}$.

5. $\left[-\frac{5}{2},+\infty\right)$　**解析**：设 f（x）＝x^2＋ax＋1，则对称轴为 x＝$-\frac{a}{2}$.

若$-\frac{a}{2}\geq\frac{1}{2}$，即 a≤－1 时，f（x）在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是减函数，则有$f\left(\frac{1}{2}\right)\geq 0\Rightarrow -\frac{5}{2}\leq a\leq 1$；

若$-\frac{a}{2}\leqslant 0$，即 a≥0 时，f（x）在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上是增函数，则有 f（0）＝1>0 恒成立，故 a≥0；

若 0<$-\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$，即－1<a<0 时，则有$f\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+1=1-\frac{a^2}{4}>0$恒成立，故－1<a<0. 综上所述，a≥$-\frac{5}{2}$.

6. ①④ **解析**：∵$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$<0，∴b<a<0，

∴$\begin{cases}a+b<0\\ ab>0\\ |b|>|a|\end{cases}$. 故①正确，②③错误；

∵a、b 同号且 a≠b，∴$\frac{b}{a},\frac{a}{b}$均为正，

∴$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$. 故④正确.

7. ∵$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

∴$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$.

8. 要证$\sqrt{b^2-ac}<\sqrt{3}a$，只需证$b^2-ac<3a^2$，即证b^2+a（a+b）<3a^2，即证（a－b）•(2a+b）>0，即证（a－b）（a－c）>0.

∵a>b>c，∴（a－b）（a－c）>0 成立,

∴原不等式成立.

9. 方法一：（作差比较法）

∵$\frac{x}{x+a}-\frac{y}{y+b}=\frac{bx-ay}{(x+a)(y+b)}$，

又∵$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$且 a、b∈R+，∴b>a>0,

又∵x>y>0，∴bx>ay,

∴$\frac{bx-ay}{(x+a)(y+b)}>0$，即$\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$.

方法二：（分析法）

∵x、y、a、b∈R+，∴要证 $\frac{x}{x+a}>\frac{y}{y+b}$，

只需证明 x（y+b）＞y（x+a），即证 xb＞ya.

而由 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ ＞0，知 b＞a＞0. 又∵x＞y＞0，

∴xb＞ya 显然成立, ∴原不等式成立.

第三节

基础梳理

1. $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)\geq\left(ac+bd\right)^2$　两个向量方向相同或相反

4. $\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2$

5. 顺序和 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$　反序和 $a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1$

6. $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\geq a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n\geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$

基础达标

1. $\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$　**解析**：由 $\log_x y$=−2 得 y= $\frac{1}{x^2}$，

而 x+y=x+ $\frac{1}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

2. 8　**解析**：$y=x+\frac{1}{x}+\frac{16x}{x^2+1}=x+\frac{1}{x}+\frac{16x}{x+\frac{1}{x}}\geq 2\sqrt{16}=8$

3. 2　**解析**：(x+y)(y+z)=xy+ y^2 +yz+zx=y(x+y+z)+zx≥ $2\sqrt{y\left(x+y+z\right)zx}$ =2.

4. [8,+∞)　**解析**：$\left(\frac{a+b+c}{a}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{b}-1\right)\left(\frac{a+b+c}{c}-1\right)=\frac{\left(b+c\right)\left(a+c\right)\left(a+b\right)}{abc}\geq\frac{8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ac}}{abc}=8$.

5. M>N　**解析**：∵a≠b, ∴ $\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}+\frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}>2\sqrt{b}+2\sqrt{a}$，∴ $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{b}+\sqrt{a}$.

举一反三

1. ∵a≥b>0, ∴ $\frac{1}{a}\leq\frac{1}{b}$, 又 c>0, ∴ $\frac{1}{bc}\geq\frac{1}{ca}$. 同理 $\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{ab}$, 从而 $\frac{1}{bc}\geq\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{ab}$.

又由于顺序和不小于乱序和，则可得 $\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{c^3a^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\ge\frac{b^5}{b^3c^3}+\frac{c^5}{c^3a^3}+\frac{a^5}{a^3b^3}=\frac{b^2}{b^3}+\frac{c^2}{a^3}+\frac{a^2}{b^3}$

(其中 $a^2\ge b^2\ge c^2,\frac{1}{c^3}\ge\frac{1}{b^3}\ge\frac{1}{a^3}$) $\ge\frac{c^2}{c^3}+\frac{a^2}{a^3}+\frac{b^2}{b^3}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

所以原不等式成立.

2. ∵x, y, z 均为正数，

$\therefore \frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}=\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\ge\frac{2}{z}$,

同理可得 $\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge\frac{2}{x}$, $\frac{z}{xy}+\frac{x}{yz}\ge\frac{2}{y}$,

当且仅当 x=y=z 时，以上三式等号都成立.

将上述三个不等式两边分别相加，并除以 2，

即得 $\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.（当且仅当 x=y=z 时，等号成立）

3. 根据柯西不等式,得

120=3[(2x+1)+(3y+4)+(5z+6)]≥$\left(1\times\sqrt{2x+1}+1\times\sqrt{3y+4}+1\times\sqrt{5z+6}\right)^2$,

故 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3y+4}+\sqrt{5z+6}\le2\sqrt{30}$.

当且仅当 2x+1=3y+4=5z+6, 即 x=$\frac{37}{6}$, y=$\frac{28}{9}$, z=$\frac{22}{15}$ 时等号成立,

此时 $u_{\max}=2\sqrt{30}$.

4. （1）当 n=1 时，左边=$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

右边=$\frac{1}{2}$，命题成立.

（2）假设当 n=k(k≥1, 且 k∈N*)时命题成立，即有

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$.

当 n=k+1 时，

左边=$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$

$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$，

从而可知，当 n=k+1 时，命题也成立.

由（1）（2）可知，命题对一切正整数 n 均成立.

考点演练

1. 4 **解析**：$\because \frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geq 4$，

$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}$， 又$\because \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{n}{a-c}$ 恒成立，$\therefore$n≤4.

2. -1 **解析**：$y=\frac{(x-1)^2}{2x-2}+\frac{1}{2x-2}=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}\leq -2\sqrt{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{2(x-1)}}=-1$.

3. P>R>Q **解析**：$\because \sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$, $\therefore \sqrt{6}-\sqrt{2}>\sqrt{7}-\sqrt{3}$，即 R>Q，又$\because$P>R, $\therefore$P>R>Q.

4. $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ **解析**：由已知易得a^2+ab+b^2=a+b, $\therefore (a+b)^2$-(a+b)=ab.

$\because$0<ab<$\frac{(a+b)^2}{4}$,

$\therefore$0<$(a+b)^2$-(a+b)< $\frac{(a+b)^2}{4}$,

解得 1<a+b<$\frac{4}{3}$.

5. $\frac{a^2}{14}$ **解析**：$\because (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+2y+3z)^2=a^2$，

即$14(x^2+y^2+z^2)\geq a^2$，$\therefore x^2+y^2+z^2\geq\frac{a^2}{14}$.

6. 3 **解析**：M≥$\frac{1}{4}$(a+b+c+a+b+d+a+c+d+b+c+d)=$\frac{3}{4}$(a+b+c+d)=3,

即 Mmin=3.

7. 由柯西不等式，得

$a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\leq\left[a^2+(1-a^2)\right]\cdot\left[b^2+(1-b^2)\right]=1$，

当且仅当$\frac{b}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-b^2}}{a}$时，上式取等号.

$\therefore$ab=$\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}$,

$a^2b^2=(1-a^2)\cdot(1-b^2)$, 于是$a^2+b^2=1$.

8. 设 b1, b2, …, bn 是 a1, a2, …, an 的重新排列，且满足 b1<b2<…<bn，又因为 $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$，

所以 $a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geq b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}$. 由于 b1, b2, …, bn 是互不相同的正整数，故 b1 ≥1, b2≥2, …, bn≥n. 从而 $b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}\geq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，原式得证.

9. f(n)=$(a+b)^n-a^n-b^n$，g(2^n)=4^n-2^{n+1}.

当 n=1 时，f(1)=0, g(2)=0，则有 f(1)=g(2)；

当 n=2 时，f(2)=$(a+b)^2-a^2-b^2$=2ab=8,

g(2^2)=4^2-2^3=8，则有 f(2)=g(2^2)；

当 n=3 时，f(3)=$(a+b)^3-a^3-b^3=3a^2b+3ab^2=3ab(a+b)>3ab\cdot 2\sqrt{ab}$ =48,

g(2^3)=4^3-2^4=48, 则有 f(3)>g(2^3)；

当 n=4 时，

f(4)=$(a+b)^4-a^4-b^4=4a^3b+4ab^3+6a^2b^2=4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2>4ab\cdot 2ab+6a^2b^2=14a^2b^2$ =224.

g(2^4)=4^4-2^5=224，则有 f(4)>g(2^4).

由此推测当 1≤n≤2 时，f(n)=g(2^n)；

当 n≥3 时，f(n)>g(2^n).

下面用数学归纳法证明:

证明：①当 n=3 时，由上述推测成立;

②假设当 n=k(k≥3, k∈N*)时，推测成立，即 f(k)>g(2^k)，

即$(a+b)^k-a^k-b^k=4^k-2^{k+1}$,

那么当 n=k+1 时，f(k+1)=$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}$

$=(a+b)\cdot(a+b)^k-a\cdot a^k-b\cdot b^k$

$=(a+b)\left[(a+b)^k-a^k-b^k\right]+a^kb+ab^k$.

又依题设知 a+b>$2\sqrt{ab}$=4.

$a^kb+ab^k>2\sqrt{a^kbab^k}=2(ab)^{\frac{k+1}{2}}=2^{k+2}$,

则有 $f(k+1)>4\left[(a+b)^k-a^k-b^k\right]+2^{k+2}>4\left(4^k-2^{k+1}\right)+2^{k+2}=4^{k+1}-2^{k+2}=g\left(2^{k+1}\right)$, 即 n=k+1 时, 推测也成立. 由①②知当 n≥3(n∈N*)时, f(n)>g(2^n)成立.