排序不等式

定理（排序不等式，又称排序定理）

设$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$，$b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$为两组

实数$c_1, c_2 \ldots c_n$是$b_1, b_2 \ldots b_n$的任一排列，

那么：

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \le a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n c_n$$

$$\le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

当且仅当$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$或$b_1 = b_2 = \ldots = b_n$时，

反序和等于顺序和。

反序和≤乱序和≤顺序和

例1：有10人各拿一只水桶去接水，设水龙头注满第i(i=1,2,…,10)个人的水桶需要t_i分，假定这些t_i各不相同。

问：只有一个水龙头时，应该如何安排10人的顺序，使他们等候的总时间最少？这个最少的总时间等于多少？

解： 总时间(分）是$10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}$

根据排序不等式，当$t_1<t_2<\cdots<t_9<t_{10}$时，总时间取最小值。

即：按水桶的大小由小到大依次接水，则10人等候的总时间最少。

最少的总时间是:

$$10t_1+9t_2+\cdots+2t_9+t_{10}$$

例2 设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是n个互不相等的正整数，求证：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\le a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}$$

证明：设$b_1,b_2,\cdots,b_n$是$a_1,a_2,\cdots a_n$的一个排列，

且有 $b_1<b_2<\cdots<b_n$

因为$b_1,b_2,\cdots,b_n$是互不相等的正整数，

所以$b_1\geq1,b_2\geq2,\cdots,b_n\geq n$.

又因 $1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}$

由排序不等式，得：

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\ldots+\frac{a_n}{n^2}\geq b_1+\frac{b_2}{2^2}+\frac{b_3}{3^2}+\ldots+\frac{b_n}{n^2}$$

$$\geq1\times1+2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{3^2}+\ldots+n\times\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

练习

1. 设$a_1, a_2, \ldots, a_n$为实数，证明：

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n \le a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,$$

其中$c_1, c_2, \ldots, c_n$是$a_1, a_2, \ldots, a_n$的任一排列。

练习

2.已知a,b,c为正数，用排序不等式证明

$$2(a^3+b^3+c^3)\geq a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b).$$

练习

3. 设$a_1, a_2, \dots, a_n$为正数，求证

$$\frac{a_1a_2}{a_3}+\frac{a_2a_3}{a_1}+\frac{a_3a_1}{a_2}\geq a_1+a_2+a_3.$$

练习

4.设$a_1,a_2,\ldots,a_n$为正数，试分别用柯西不等式与排序不等式证明

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geq a_1+a_2+\ldots+a_n.$$