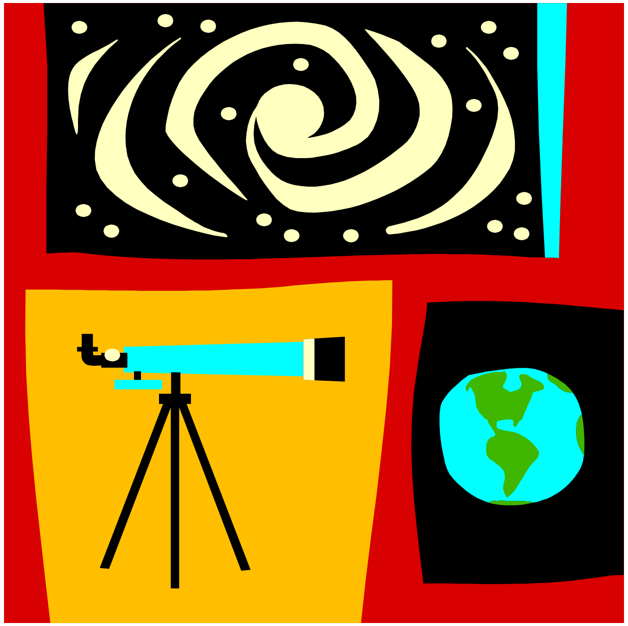
不等式的证明



复习

- 不等式证明的常用方法:
- 比较法、综合法、分析法

反证法

先假设要证明的命题不成立，以此为出发点,结合已知条件,应用公理、定义、定理、性质等,进行正确的推理，得到矛盾，说明假设不正确,从而间接说明原命题成立的方法。

例1.已知x，$y \succ 0$，且$x+y \succ 2$.试证：

$\frac{1+x}{y}, \frac{1+y}{x}$中至少有一个小于2.

例题

- 例2、已知$a + b + c > 0$，$ab + bc + ca > 0$，
- $abc > 0$， 求证：$a, b, c > 0$
- 证：设$a < 0$, $\because abc > 0$, $\therefore bc < 0$
- 又由$a + b + c > 0$, 则$b + c > -a > 0$
- $\therefore ab + bc + ca = a(b + c) + bc < 0$
- 与题设矛盾
- 若$a = 0$，则与$abc > 0$矛盾，
- $\therefore$必有$a > 0$
- 同理可证：$b > 0$, $c > 0$

例3、设$0 < a, b, c < 1$，求证：$(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a$,

不可能同时大于1/4

证明：设$(1-a)b>1/4$，　$(1-b)c>1/4$，$(1-c)a>1/4$，

则三式相乘：$(1-a)b\bullet(1-b)c\bullet(1-c)a > \dfrac{1}{64}$　　①

又$\because 0 < a, b, c < 1$　$\therefore$　$0 < (1-a)a \le \left[\dfrac{(1-a)+a}{2}\right]^2 = \dfrac{1}{4}$

同理：　$(1-b)b \le \dfrac{1}{4}$　$(1-c)c \le \dfrac{1}{4}$

以上三式相乘：$(1-a)a\bullet(1-b)b\bullet(1-c)c \le \dfrac{1}{64}$

与①矛盾$\therefore$结论成立

放缩法

- 在证明不等式过程中，有时为了证明的需要，可对有关式子适当进行放大或缩小，实现证明。例如：
- 要证**$b<c$**,只须寻找**b_1**使**$b<b_1$**且**$b_1\le c$**(放大)
- 要证**$b>a$**,只须寻找**b_2**使**$b>b_2$**且**$b_2\ge a$**(缩小)
- 这种证明方法,我们称之为*放缩法*。
- *放缩法*的依据就是传递性。

例1、若$a, b, c, d \in R^+$，求证：

$$1 < \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c} < 2$$

证：记$m = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+d+b} + \frac{d}{d+a+c}$

$\because a, b, c, d \in R^+$

$$\therefore m > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+a} + \frac{c}{c+d+a+b} + \frac{d}{d+a+b+c} = 1$$

同时 $m < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+c} = 2$

$\therefore 1 < \mathrm{m} < 2$ 即原式成立

例2已知a, b是实数，求证:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

法 1：$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

证明：在$|a+b|=0$时，显然成立.

当$|a+b|\neq 0$时，左边$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|a+b|}+1}$

$$\le\frac{1}{\dfrac{1}{|a|+|b|}+1}=\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

法2：

$$\because 0 \le |a+b| \le |a|+|b|,$$

$$\therefore \frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{|a+b|+1-1}{1+|a+b|}=1-\frac{1}{1+|a+b|}$$

$$\le 1-\frac{1}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

法3：函数的方法

例3求证：

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}(n\in n^{*})$$

$$\because \frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}),k\in N^{*}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$<2[(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})]=2\sqrt{n}.$$

例4、已知：a、b、c∈ R^{+}，求证：

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}\geq a+b+c$$

略解

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}$$

$$=\sqrt{(b+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}a^2}+\sqrt{(c+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}a^2}$$

$$\geq\sqrt{(b+\frac{a}{2})^2}+\sqrt{(c+\frac{a}{2})^2}$$

$$=a+b+c$$

小结

- 在证明不等式过程中，有时为了证明的需要，可对有关式子适当进行放大或缩小，实现证明。例如：
- 要证$b<c$,只须寻找b_1使$b<b_1$且$b_1\le c$(放大)
- 要证$b>a$,只须寻找b_2使$b>b_2$且$b_2\ge a$(缩小)
- 这种证明方法,我们称之为*放缩法*。
- *放缩法*的依据就是定理**2**（传递性性质）

课堂练习

1、当 $n>2$ 时，求证：$\log_n(n-1)\log_n(n+1)<1$

证：$\because n>2$ $\quad\therefore\quad \log_n(n-1)>0,\quad \log_n(n+1)>0$

$$\therefore \log_n(n-1)\log_n(n+1)<\left[\frac{\log_n(n-1)+\log_n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$=\left[\frac{\log_n(n^2-1)}{2}\right]^2$$

$$<\left[\frac{\log_n n^2}{2}\right]^2=1$$

$\therefore n>2$时，$\quad \log_n(n-1)\log_n(n+1)<1$

课堂练习

- 2、若$p>0,q>0$,且$p^3+q^3=2$,
-     求证：$p+q\le 2$