一、二维形式的柯西不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2\ \ (a,b,c,d\in R,\text{当且仅当}ad=bc\text{时,等号成立.})$$

二、二维形式的柯西不等式的变式

$$(1)\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge|ac+bd|\ (a,b,c,d\in R,\text{当且仅当}ad=bc\text{时,等号成立.})$$

$$(2)\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\ge|ac|+|bd|\ (a,b,c,d\in R,\text{当且仅当}ad=bc\text{时,等号成立.})$$

$$(3)(a+b)(c+d)\ge(\sqrt{ac}+\sqrt{bd})^2\ (a,b,c,d\ge0,\text{当且仅当}ad=bc\text{时,等号成立.})$$

三、二维形式的柯西不等式的向量形式

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|.\text{(当且仅当}\vec{\beta}\text{是零向量,或存在实数}k,\text{使}\vec{\alpha}=k\vec{\beta}\text{时,等号成立.)}$$

借用一句革命口号说：有条件要用；没有条件，创造条件也要用。比如说吧，对 a^2 + b^2 + c^2，并不是不等式的形状，但变成(1/3) * (1^2 + 1^2 + 1^2) * (a^2 + b^2 + c^2)就可以用柯西不等式了。

基本方法

（1）巧拆常数：

例 1：设 a 、b 、c 为正数且各不相等。求证：$\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}>\dfrac{9}{a+b+c}$

（2）重新安排某些项的次序：

例 2：a 、b 为非负数，$a+b$ =1，$x_1,x_2\in R^+$ 求证：$(ax_1+bx_2)(bx_1+ax_2)\ge x_1x_2$

（3）改变结构：例 3、若 $a>b>c$ 求证：$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\ge\dfrac{4}{a-c}$

（4）添项：例 4：$a,b,c\in R^+$ 求证：$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$

【1】、设 $\vec{a}=(-2,1,2),|\vec{b}|=6$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最小值为________；此时 $\vec{b}=$________。

答案：-18; $(4,-2,-4)$ 解析：$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$ $\therefore|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le18$ $\therefore-18\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le18$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ 之最小值为-18，此时 $\vec{b}=-2\vec{a}=(4,-2,-4)$

【2】 设 $\vec{a}=(1，0，-2)$，$\vec{b}=(x，y，z)$，若 $x^2+y^2+z^2=16$，则 $\vec{a}\ \vec{b}$ 的最大值为__________。

【解】∵ $\vec{a}=(1，0，-2)$，$\vec{b}=(x，y，z)$ ∴ $\vec{a}\ .\ \vec{b}=x-2z$

由柯西不等式$[1^2+0+(-2)^2](x^2+y^2+z^2)\ge(x+0-2z)^2$

$\Rightarrow\ 5\times16\ge(x-2z)^2\ \Rightarrow\ -4\sqrt{5}\le x\le4\sqrt{5}$

$\Rightarrow\ -4\sqrt{5}\le\ \vec{a}\ .\ \vec{b}\ \le4\sqrt{5}$，故 $\vec{a}\ .\ \vec{b}$ 的最大值为 $4\sqrt{5}$

【3】空间二向量 $\vec{a}=(1,2,3)$，$\vec{b}=(x,y,z)$，已知 $|\vec{b}|=\sqrt{56}$，则(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值为多少？(2)此时 $\vec{b}=$？

Ans：(1) 28：(2) (2,4,6)

【4】设 a、b、c 为正数，求 $(a+b+c)(\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{36}{c})$ 的最小值。Ans：121

【5】. 设 x，y，z ∈ R，且满足 $x^2+y^2+z^2=5$，则 $x+2y+3z$ 之最大值为__________

解$(x+2y+3z)^2\le(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+3^2)=5．14=70$∴ $x+2y+3z$ 最大值为 $\sqrt{70}$

【6】 设 x，y，z ∈ R，若 $x^2+y^2+z^2=4$，则 $x-2y+2z$ 之最小值为__________时，(x，y，z) = _______

解$(x-2y+2z)^2 \le (x^2+y^2+z^2)[1^2+(-2)^2+2^2]=4．9=36$

∴ $x-2y+2z$ 最小值为 -6，$\boxed{\text{公式法求 (x，y，z)}}$ 此时 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{2}=\dfrac{-6}{2^2+(-2)^2+2^2}=\dfrac{-2}{3}$

∴ $x=\dfrac{-2}{3}$，$y=\dfrac{4}{3}$，$z=\dfrac{-4}{3}$

【7】设 $x,y,z\in R$，$x^2+y^2+z^2=25$，试求 $x-2y+2z$ 的最大值 M 与最小值 m。

Ans：$M=15;m=-15$

【8】、设 $x,y,z\in\mathbf{R}$, $x^2+y^2+z^2=25$，试求 $x-2y+2z$ 的最大值与最小值。

答：根据柯西不等式

$(1\cdot x-2\cdot y+2\cdot z)^2 \le [1^2+(-2)^2+2^2](x^2+y^2+z^2)$

即 $(x-2y+2z)^2 \le 9\times 25$　　　而有 $-15\le x-2y+2z\le 15$

故 $x-2y+2z$ 的最大值为 15，最小值为–15。

【9】、设 $x,y,z\in\mathbf{R}$, $2x-y-2z=6$，试求 $x^2+y^2+z^2$ 之最小值。

答案：考虑以下两组向量

$\vec{u}=(2,-1,-2)$　　　$\vec{v}=(x,y,z)$　根据柯西不等式 $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\le|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$，就有

$[2x+(-1)y+(-2)z]^2\le[2^2+(-1)^2+(-2)^2](x^2+y^2+z^2)$ 即

$(2x-y-2z)^2\le 9(x^2+y^2+z^2)$ 将 $2x-y-2z=6$ 代入其中，得 $36\le 9(x^2+y^2+z^2)$ 而有

$x^2+y^2+z^2\ge 4$ 故 $x^2+y^2+z^2$ 之最小值为 4。

【10】设 $x,y,z\in R$，$2x-y-2z=6$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值 m，并求此时 x、y、z 之值。

Ans：$m=4;(x,y,z)=(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3})$

【11】 设 x，y，z ∈ R，$2x+2y+z+8=0$，则$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$ 之最小值为__________

解： $2x+2y+z+8=0 \;\Rightarrow\; 2(x-1)+2(y+2)+(z-3)=-9$，

考虑以下两组向量　$\vec{u}=(\quad,\quad,\quad)$，$\vec{v}=(\quad,\quad,\quad)$　$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\le|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$

$[2(x-1)+2(y+2)+(z-3)]^2\le[(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2]．(2^2+2^2+1^2)$

$\Rightarrow\; (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2\ge\dfrac{(-9)^2}{9}=9$

【12】设 x, y, z∈R，若 $2x-3y+z=3$，则 $x^2+(y-1)^2+z^2$ 之最小值为________，又此时 $y=$________。

解： $2x-3y+z=3 \;\Rightarrow\; 2x-3(y-1)+z=(\quad)$，

考虑以下两组向量　$\vec{u}=(\quad,\quad,\quad)$，$\vec{v}=(\quad,\quad,\quad)$

解析：$[x^2+(y-1)^2+z^2][2^2+(-3)^2+1^2]\ge(2x-3y+3+z)^2[x^2+(y-1)^2+z^2]\ge\dfrac{36}{14}$　∴最小值 $\dfrac{18}{7}$

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{1}=t$，　∵ $2x-3y+z=3$，∴ $2t(2-)\ t3($

$\therefore t=\dfrac{3}{7}$　　　$\therefore y=-\dfrac{2}{7}$

【13】 设 a，b，c 均为正数且 $a+b+c=9$，则 $\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c}$ 之最小值为__________

解：考虑以下两组向量

$\vec{u}=(\quad,\quad,\quad)$，$\vec{v}=(\quad,\quad,\quad)$

$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\le|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$　　$(\dfrac{2}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\dfrac{3}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\dfrac{4}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c})^2 \le (\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c})(a+b+c)$

$\Rightarrow \quad (\dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c}).\ 9 \geq (2+3+4)^2 = 81$

$\Rightarrow \quad \dfrac{4}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{16}{c} \geq \dfrac{81}{9} \ = 9$

【14】、设 a, b, c 均为正数，且 $a+2b+3c=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$ 之最小值为________，此时 $a=$________。

解：考虑以下两组向量　　$\vec{u}$ = (　　,　　,　　)　，$\vec{v}$ =(　　,　　,　　)

$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \qquad [(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2+(\sqrt{3c})^2][(\sqrt{\dfrac{1}{a}})^2+(\sqrt{\dfrac{2}{b}})^2+(\sqrt{\dfrac{3}{c}})^2] \geq (1+2+3)^2$

$\therefore (\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}) \geq 18$，最小值为 18　等号发生于 $\vec{u} /\!/ \vec{v}$ 故 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\dfrac{1}{a}}}=\dfrac{\sqrt{2b}}{\sqrt{\dfrac{2}{b}}}=\dfrac{\sqrt{3c}}{\sqrt{\dfrac{3}{c}}}$

$\therefore a=b=c$　又 $a+2b+3c=2$ $\therefore a=\dfrac{1}{3}$

【15】. 设空间向量 $\vec{a}$ 的方向为α，β，γ，$0<\alpha, \beta, \gamma<\pi$，$\csc^2\alpha + 9\csc^2\beta + 25\csc^2\gamma$ 的最小值为__________。

解∵　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ 由柯西不等式

∴　$(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)[(\dfrac{1}{\sin\alpha})^2+(\dfrac{3}{\sin\beta})^2+(\dfrac{5}{\sin\gamma})^2] \geq (1+3+5)^2 \quad 2(\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+25\csc^2\gamma) \geq 81$

∴　$\csc^2\alpha+9\csc^2\beta+25\csc^2\gamma \geq \dfrac{81}{2}$　∴　故最小值为 $\dfrac{81}{2}$

【注】本题亦可求 $\tan^2\alpha + 9\tan^2\beta + 25\tan^2\gamma$ 与 $\cot^2\alpha + 9\cot^2\beta + 25\cot^2\gamma$ 之最小值，请自行练习。

【16】. 空间中一向量 $\vec{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向之夹角依次为α，β，γ（α，β，γ 均非象限角），求 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}$ 的最小值。

解：由柯西不等式 $[(\dfrac{1}{\sin\alpha})^2+(\dfrac{2}{\sin\beta})^2+(\dfrac{3}{\sin\gamma})^2](\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) \geq$

$(\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha+\dfrac{2}{\sin\beta}\cdot\sin\beta+\dfrac{3}{\sin\gamma}\cdot\sin\gamma)^2$

$\Rightarrow \quad (\dfrac{1}{\sin^2\alpha})+(\dfrac{4}{\sin^2\beta})+(\dfrac{9}{\sin^2\gamma})](\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) \geq (1+2+3)^2$

∵　$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

$\therefore (\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}) \geq 36 \Rightarrow \quad (\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}) \geq 18$

∴　$\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{4}{\sin^2\beta}+\dfrac{9}{\sin^2\gamma}$ 的最小值 $=18$

【17】. 空间中一向量 $\vec{a}$ 的方向角分别为 α,β,γ，求 $\dfrac{9}{\sin^2\alpha}+\dfrac{25}{\sin^2\beta}+\dfrac{16}{\sin^2\gamma}$ 的最小值。

答 72 利用柯西不等式解之

【18】、设 x, y, z∈R，若 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=4$，则 $3x-y-2z$ 之范围为何？又 $3x-y-2z$ 发生最小值时，$x=$？

答案：$[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2][3^2+(-1)^2+(-2)^2] \geq (3x-3-y-2-2z)^2$

$4(14) \geq (3x-y-2z-5)^2$

$-2\sqrt{14} \leq 3x-y-2z-5 \leq 2\sqrt{14}$　　若 $3x-y-2z=5-2\sqrt{14}$ 又 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}=t$ $\therefore$

$5-2\sqrt{14} \leq 3x-y-2z \leq 5+2\sqrt{14}$

$3(3t+1)-(-t-2)-2(-2t)=5-2\sqrt{14}$ $\therefore t=-\dfrac{\sqrt{14}}{7}$　$\therefore x=-\dfrac{3\sqrt{14}}{7}+1$

【19】 设△ABC 之三边长 x，y，z 满足 $x-2y+z=0$ 及 $3x+y-2z=0$，则△ABC 之最大角是多少度？

【解】$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow$　x：y：z $=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$：$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$：$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 3：5：7

设三边长为 x = 3k，y = 5k，z = 7k 则最大角度之 $\cos\theta=\dfrac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2(3k)(5k)}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \theta=120°$

【20】．设 x，y，z ∈ R 且 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$，求 x + y + z 之最大值，最小值。

Ans 最大值 7；最小值 −3

【解】∵ $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+2)^2}{5}+\dfrac{(z-3)^2}{4}=1$ 由柯西不等式知

$[4^2+(\sqrt{5})^2+2^2]\left[(\dfrac{x-1}{4})^2+(\dfrac{y+2}{\sqrt{5}})^2+(\dfrac{z-3}{2})^2+\right] \geq \left[4.\ (\dfrac{x-1}{4})+\sqrt{5}.\ (\dfrac{y+2}{\sqrt{5}})+2\right.$

$\left.(\dfrac{z-3}{2})\right]^2$　$\Rightarrow$　$25 \times 1 \geq (x+y+z-2)^2$　$\Rightarrow$　$5 \geq |x+y+z-2|$

$\Rightarrow$　$-5 \leq x+y+z-2 \leq 5$　$\therefore$　$-3 \leq x+y+z \leq 7$

故 x + y + z 之最大值为 7，最小值为 −3

【21】．求 $2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\sin\phi-\cos\theta\cos\phi$ 的最大值与最小值。

答. 最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 $-2\sqrt{2}$

【详解】令向量 $\vec{a}=(2\sin\theta，\sqrt{3}\cos\theta，-\cos\theta)$，$\vec{b}=(1，\sin\phi，\cos\phi)$由柯西不等式 $|\vec{a}.\ \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$得

$|2\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\sin\phi-\cos\theta\cos\phi| \leq \sqrt{4\sin^2\theta+3\cos^2\theta+\cos^2\theta}$，

$\sqrt{1+\sin^2\phi+\cos^2\phi} \leq \sqrt{4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1+\sin^2\phi+\cos^2\phi)}=2\sqrt{2}$

所求最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 $-2\sqrt{2}$

【22】△ABC 的三边长为 a、b、c，其外接圆半径为 R，求证：

$(a^2+b^2+c^2)(\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}) \geq 36R^2$ 证明：由三角形中的正弦定理得

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，所以 $\dfrac{1}{\sin^2 A}=\dfrac{4R^2}{a^2}$，同理 $\dfrac{1}{\sin^2 B}=\dfrac{4R^2}{b^2}$，$\dfrac{1}{\sin^2 C}=\dfrac{4R^2}{c^2}$ 于是左边=

$(a^2+b^2+c^2)(\dfrac{4R^2}{a^2}+\dfrac{4R^2}{b^2}+\dfrac{4R^2}{c^2}) \geq (a\cdot\dfrac{2R}{a}+a\cdot\dfrac{2R}{b}+a\cdot\dfrac{2R}{c})^2=36R^2$。

【23】求证:点 $P(x_0,y_0)$到直线 Ax+By+C=0 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

证明:设 Q(x,y)是直线上任意一点,则 Ax+By+C=0.因为$|PQ|^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$,$A^2+B^2\neq0$,由柯西不等式得

(A^2+B^2) ［$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$］ ≥ ［$A(x-x_0)+B(y-y_0)$］^{2}=［$(Ax+By)-(Ax_0+By_0)$］$^2=(Ax_0+By_0+C)^2$, 所以 $|PQ|\ge\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

当 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$ 时,取等号,由垂线段最短得 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

【24】已知正数 x,y,z 满足 x+y+z=xyz,且不等式 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\le\lambda$ 恒成立,求 λ 的范围.

解析:由二元均值不等式及柯西不等式,得

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\le\frac{1}{2\sqrt{xy}}+\frac{1}{2\sqrt{yz}}+\frac{1}{2\sqrt{zx}}=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{z}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{x}{x+y+z}}+\sqrt{\frac{y}{x+y+z}})$$

$\le\frac{1}{2}\sqrt{(1^2+1^2+1^2)(\frac{z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z})}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 故 λ 的取值范围是［$\frac{\sqrt{3}}{2}$,+∞).

温馨提示

本题主要应用了最值法,即不等式 $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\le\lambda$ 恒成立,等价于$(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x})_{max}\le\lambda$,问题转化为求 $f(x,y,z)=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$ 的最大值.

【25】设 a,b,c,x,y,z 均为正实数,且满足 $a^2+b^2+c^2=25,x^2+y^2+z^2=36,ax+by+cz=30$.求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值.

解析:根据已知等式的特点,可考虑用柯西不等式.

由柯西不等式等号成立的条件,知 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$=λ,再由等比定理,得 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$=λ.因此只需求 λ 的值即可.由柯西不等式,得 $30^2=(ax+by+cz)^2\le(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25\times36$,当且仅当 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$=λ 时,上式等号成立.

于是 a=λx,b=λy,c=λz,从而有 $\lambda^2(x^2+y^2+z^2)=25$,∴$\lambda=\pm\frac{5}{6}$ (舍负),即 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{5}{6}$.