一、数列的定义和基本问题

1．通项公式：$a_n = f(n)$（用函数的观念理解和研究数列，特别注意其定义域的特殊性）；

2．前 n 项和：$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$；

3. 通项公式与前 n 项和的关系（是数列的基本问题也是考试的热点）：$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$

二、等差数列

1．定义和等价定义：$a_n-a_{n-1}=d(n\geq 2)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列；

2．通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=An+B$；推广：$a_n=a_m+(n-m)d$；

3．前 n 项和公式：$S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=An^2+Bn$；

4．重要性质举例

①a与b的等差中项$A=\dfrac{a+b}{2}$；

②若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$；特别地：若$m+n=2p$，则$a_m+a_n=2a_p$；

③奇数项a_1,a_3,a_5，…成等差数列，公差为$2d$；偶数项a_2,a_4,a_6，…成等差数列，公差为$2d$.

④若有奇数项$2n+1$项，则$S_{2n+1}=(2n+1)a_{n+1}$；

⑤设$A=a_1+a_2+\ldots+a_n$，$B=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}$，$C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\ldots+a_{3n}$，则有$2B=A+C$；

⑥当$a_1>0,d<0$时，S_n有最大值；当$a_1<0,d>0$时，S_n有最小值.

⑦用一次函数理解等差数列的通项公式；用二次函数理解等差数列的前 n 项和公式.

三、等比数列

1．定义：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2,a_n\neq 0,q\neq 0)\Leftrightarrow\{a_n\}$成等比数列；

2．通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$；推广$a_n=a_mq^{n-m}$；

3．前 n 项和$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$；**（注意对公比的讨论）**

4．重要性质举例

①a与b的等比中项 G$\Leftrightarrow G^2=ab\Leftrightarrow G=\pm\sqrt{ab}$（$a,b$同号）；

②若 $m+n=p+q$，则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$；特别地：若 $m+n=2p$，则 $a_m \cdot a_n = a_p^2$；

③ 设 $A=a_1+a_2+\ldots+a_n$， $B=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}$ ， $C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\ldots+a_{3n}$ ， 则有

$B^2=A\cdot C$；

④用指数函数理解等比数列（当 $a_1>0, q>0, q\neq 1$ 时）的通项公式.

四、等差数列与等比数列的关系举例

1． $\{a_n\}$ 成等差数列 $\Leftrightarrow$ $\{b^{a_n}\}$ 成等比数列；

2． $\{a_n\}$ 成等比数列 $\overset{a_n>0}{\Longleftrightarrow}$ $\{\log_b a_n\}$ 成等差数列.

五、数列求和方法

1．等差数列与等比数列；

2．几种特殊的求和方法

（1）裂项相消法； $a_n=\dfrac{1}{(An+B)(An+C)}=\dfrac{1}{C-B}\left(\dfrac{1}{An+B}-\dfrac{1}{An+C}\right)$

（2）错位相减法： $a_n=b_n\cdot c_n$，其中 $\{b_n\}$ 是等差数列， $\{c_n\}$ 是等比数列

记 $S_n=b_1c_1+b_2c_2+\ldots+b_{n-1}c_{n-1}+b_nc_n$；则 $qS_n=b_1c_2+\ldots\ldots+b_{n-1}c_n+b_nc_{n+1}$，⋯

（3）通项分解法： $a_n=b_n\pm c_n$

六、递推数列与数列思想

1．递推数列

（1）能根据递推公式写出数列的前几项；

（2）常见题型：由 $f(S_n,a_n)=0$，求 a_n,S_n.解题思路：利用 $a_n=S_n-S_{n-1},(n\geq 2)$

2．数学思想

（1）迭加累加（等差数列的通项公式的推导方法）若 $a_n-a_{n-1}=f(n),(n\geq 2)$，则⋯⋯；

（2）迭乘累乘（等比数列的通项公式的推导方法）若 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=g(n)(n\geq 2)$，则⋯⋯；

（3）逆序相加（等差数列求和公式的推导方法）；

（4）错位相减（等比数列求和公式的推导方法）.

七、用数学归纳法证明一个与正整数有关的命题时，其步骤有：

（1）证明对 n 的初始值结论成立

（2）假设当 n=k 时结论成立，证明当 n=k+1 时结论也成立

（3）综上所证，得结论。

八、数列极限（C 为常数）

$\lim\limits_{n\to\infty}C=\text{C}$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C}{n}=0$　　$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=$当|a|<1 时为 0；当|a|>1 时不存在；当 a=1 时为 1；当 a= -1 时不存在。

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\pm\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}\qquad\lim_{n\to\infty}(c a_n)=c\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}\dfrac{a_p}{a_q}(p=q)\\0(p<q)\\\infty(p>q)\end{cases}$$

（若 f(n),g(n)分别是关于 n 的一元多项式，最高次数分别是 p,q，最高次项的系数分别是 a_p,a_q 且 $g(n)\neq 0$）

【考点聚焦】

考点 1：数列的有关概念，简单的递推公式给出的数列；

考点 2：等差、等比数列的概念，等差、等比数列的通项公式，前 n 项和公式，并运用它们解决一些问题；

考点 3：数列极限的意义，极限的四则运算，公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列的前 n 项和的极限；

考点 4：数学归纳法

【自我检测】

1、 ________________________________叫做数列。

2、 等差数列、等比数列定义及性质

	等差数列	等比数列
定义		
通项公式		
前 n 项和公式		
性质	1、d>0 时数列____；d<0 时____； 2、a_1+a_n=______=_______=… 3、若 m,n,p,q∈N+,且 m+n=p+q，则 _______________ 4、每隔相同的项抽出的项按次序构成的数列为_________。 5、连续几项之和构成_________。 6、$S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$成________ 7、{$ma_n$+k} 为__________	1、____时数列递增；____时递减； 2、$a_1\cdot a_n$=______=_______=… 3、若 m,n,p,q∈N+,且 m+n=p+q，则 _______________ 4、每隔相同的项抽出的项按次序构成的数列为_________。 5、连续几项之和构成_________。 6、{ma_n} , {a_n^2} 为__________

3、 无穷等比数列公比｜q|＜1，则各项和 S＝___________。

4、 求数列前 n 项和的方法：（1）直接法；（2）倒序相加法；（3）错位相减法；（4）分组转化法；（5）裂项相消法.

【重点•难点•热点】

问题 1：等差、等比数列的综合问题

“巧用性质、减少运算量”在等差、等比数列的计算中非常重要，但用“基本量法”并树立“目标意识”，“需要什么，就求什么”，既要充分合理地运用条件，又要时刻注意题的目标，往往能取得与“巧用性质”解题相同的效果.

例 1： 设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，项数是偶数，它的所有项的和等于偶数项和的 4 倍，且第二项与第四项的积是第 3 项与第 4 项和的 9 倍，问数列$\{\lg a_n\}$的前多少项和最大？(取 lg2=0.3,lg3=0.4)

思路分析： 突破本题的关键在于明确等比数列各项的对数构成等差数列，而等差数列中前 n 项和有最大值，一定是该数列中前面是正数，后面是负数，当然各正数之和最大；另外，等差数列 S_n 是 n 的二次函数，也可由函数解析式求最值.

解法一： 设公比为 q,项数为 $2m,m\in\mathbf{N}^*$,依题意有

$$\begin{cases}\dfrac{a_1\cdot(q^{2m}-1)}{q-1}=\dfrac{a_1q\cdot(q^{2m}-1)}{q^2-1}\\(a_1q)\cdot(a_1q^3)=9(a_1q^2+a_1q^3)\end{cases}，化简得\begin{cases}\dfrac{4q}{q+1}=1\\a_1q^2=9(1+q),\end{cases}，解得\begin{cases}q=\dfrac{1}{3}\\a_1=108\end{cases},$$

设数列$\{\lg a_n\}$前 n 项和为 S_n,则

$S_n=\lg a_1+\lg(a_1q^2)+\cdots+\lg(a_1q^{n-1})=\lg(a_1^n\cdot q^{1+2+\cdots+(n-1)})$

$=n\lg a_1+\frac{1}{2}n(n-1)\cdot\lg q=n(2\lg2+\lg3)-\frac{1}{2}n(n-1)\lg3$

$=(-\frac{\lg3}{2})\cdot n^2+(2\lg2+\frac{7}{2}\lg3)\cdot n$

可见，当 $n=\dfrac{2\lg2+\frac{7}{2}\lg3}{\lg3}$ 时，S_n 最大. 而 $\dfrac{2\lg2+\frac{7}{2}\lg3}{\lg3}=\dfrac{4\times0.3+7\times0.4}{2\times0.4}=5$,

故$\{\lg a_n\}$的前 5 项和最大.

解法二： 接前，$a_1=108,q=\frac{1}{3}$,于是 $\lg a_n=\lg[108(\frac{1}{3})^{n-1}]=\lg108+(n-1)\lg\frac{1}{3}$,

∴数列$\{\lg a_n\}$是以 lg108 为首项，以 $\lg\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列，

令 $\lg a_n\geqslant0$,得 $2\lg2-(n-4)\lg3\geqslant0$,

∴$n\leqslant\dfrac{2\lg2+4\lg3}{\lg3}=\dfrac{2\times0.3+4\times0.4}{0.4}=5.5$.

由于 $n\in\mathbf{N}^*$,可见数列$\{\lg a_n\}$的前 5 项和最大.

点评： 本题主要考查等比数列的基本性质与对数运算法则，等差数列与等比数列之间的联系以及运算、分析能力.

演变 1 等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它前 $3m$ 项的和为_______.

点拨与提示：本题可以回到数列的基本量，列出关于 a_1和d 的方程组，然后求解；或运用等差数列的性质求解.

问题 2：函数与数列的综合题

数列是一特殊的函数，其定义域为正整数集，且是自变量从小到大变化时函数值的序列。注意深刻理解函数性质对数列的影响，分析题目特征，探寻解题切入点.

例 2： 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ $(x<-2)$.

(1) 求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$； (2) 设 $a_1=1,\dfrac{1}{a_{n+1}}=-f^{-1}(a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$,求 a_n;

(3)设 $S_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,b_n=S_{n+1}-S_n$ 是否存在最小正整数 m,使得对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,有 $b_n<\dfrac{m}{25}$ 成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由.

思路分析： (2)问由式子 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{a_n^2}+4}$ 得 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=4$,构造等差数列$\{\dfrac{1}{a_n^2}\}$,从而求得 a_n,即“借鸡生蛋”是求数列通项的常用技巧；(3)问运用了函数的思想.

解： (1)设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$,∵$x<-2$,∴$x=-\sqrt{4+\dfrac{1}{y^2}}$,即 $y=f^{-1}(x)=-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}$ $(x>0)$

(2)∵ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{4+\dfrac{1}{a_n^2}}$,∴$\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=4$， ∴$\{\dfrac{1}{a_n^2}\}$是公差为 4 的等差数列，

∵$a_1=1$, $\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+4(n-1)=4n-3$,∵$a_n>0$,∴$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{4n-3}}$.

(3)$b_n=S_{n+1}-S_n=a_{n+1}^2=\dfrac{1}{4n+1}$,由 $b_n<\dfrac{m}{25}$,得 $m>\dfrac{25}{4n+1}$，

设 $g(n)=\dfrac{25}{4n+1}$,∵$g(n)=\dfrac{25}{4n+1}$ 在 $n\in\mathbf{N}^*$上是减函数，

∴$g(n)$的最大值是 $g(1)=5$,

∴$m>5$,存在最小正整数 $m=6$,使对任意 $n\in\mathbf{N}^*$有 $b_n<\dfrac{m}{25}$ 成立.

点评： 本题融合了反函数，数列递推公式，等差数列基本问题、数列的和、函数单调性等知识于一炉，结构巧妙，形式新颖，是一道精致的综合题. 着重考查学生的逻辑分析能力.本题首问考查反函数，反函数的定义域是原函数的值域，这是一个易错点，(2)问以数列$\{\dfrac{1}{a_n^2}\}$为桥梁求 a_n,不易突破.

演变 2：设 $f_1(x)=\dfrac{2}{1+x}$， 定义 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)],a_n=\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}$， 其中 n∈N*.

（1）求数列｛a_n｝的通项公式；

（2）若 $T_{2n}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2na_{2n}$, $Q_n=\dfrac{4n^2+n}{4n^2+4n+1,}$，其中 n∈N*，试比较 $9T_{2n}$ 与 Q_n 大小，并说明理由.

点拨与提示：（1）找出数列｛a_n｝的递推关第，进而判断数列的类型；（2）根据特征，找出求和的匹配方法。

问题 3：数列与解析几何。

数列与解析几何综合题，是今后高考命题的重点内容之一，求解时要充分利用数列、解析几何的概念、性质，并结合图形求解.

例 3. 在直角坐标平面上有一点列 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\cdots,P_n(x_n,y_n)\cdots$，对一切正整数 n，点 P_n 位于函数 $y=3x+\dfrac{13}{4}$ 的图象上，且 P_n 的横坐标构成以 $-\dfrac{5}{2}$ 为首项，-1 为公差的等差数列 $\{x_n\}$.

⑴求点 P_n 的坐标；

⑵设抛物线列 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$ 中的每一条的对称轴都垂直于 x 轴，第 n 条抛物线 c_n 的顶点为 P_n，且过点 $D_n(0,n^2+1)$，记与抛物线 c_n 相切于 D_n 的直线的斜率为 k_n，求：$\dfrac{1}{k_1k_2}+\dfrac{1}{k_2k_3}+\cdots+\dfrac{1}{k_{n-1}k_n}$.

解：（1） $x_n=-\dfrac{5}{2}+(n-1)\times(-1)=-n-\dfrac{3}{2}$

$\therefore y_n=3\cdot x_n+\dfrac{13}{4}=-3n-\dfrac{5}{4},\therefore P_n(-n-\dfrac{3}{2},-3n-\dfrac{5}{4})$

（2）$\because c_n$ 的对称轴垂直于 x 轴，且顶点为 P_n .$\therefore$ 设 c_n 的方程为：

$$y=a(x+\frac{2n+3}{2})^2-\frac{12n+5}{4},$$

把 $D_n(0,n^2+1)$ 代入上式，得 $a=1$，$\therefore c_n$ 的方程为： $y=x^2+(2n+3)x+n^2+1$。

$k_n=y'|_{x=0}=2n+3$，$\therefore\dfrac{1}{k_{n-1}k_n}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$

$\therefore\dfrac{1}{k_1k_2}+\dfrac{1}{k_2k_3}+\cdots+\dfrac{1}{k_{n-1}k_n}=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9})+\cdots+(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})]$

$=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2n+3})=\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{4n+6}$

点评：本例为数列与解析几何的综合题，难度较大。(1)、(2) 两问运用几何知识算出 k_n.

演变 3. 已知抛物线 $x^2=4y$，过原点作斜率 1 的直线交抛物线于第一象限内一点 P_1，又过点 P_1 作斜率为 $\dfrac{1}{2}$ 的直线交抛物线于点 P_2，再过 P_2 作斜率为 $\dfrac{1}{4}$ 的直线交抛物线于点 P_3，$\cdots$，如此继续，一般地，过点 P_n 作斜率为 $\dfrac{1}{2^n}$ 的直线交抛物线于点 P_{n+1}，设点 $P_n(x_n,y_n)$.

（Ⅰ）令 $b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}$，求证：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

（Ⅱ）设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，试比较 $\dfrac{3}{4}S_n+1$ 与 $\dfrac{1}{3n+10}$ 的大小.

点拨与提示：（1）由抛物线的方程和斜率公式得到 $\dfrac{1}{4}\dfrac{x^2_{n+1}-x^2_n}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{1}{2^n}\Rightarrow x_{n+1}+x_n=\dfrac{1}{2^{n-2}}$，从而求出 $\{b_n\}$ 的通项公式；（2）用数学归纳法证明.

问题 4、数列与不等式

数列与不等式相联系的综合题也是常考题型，要注意把数列的逆推性与不等式问题的思考方法结合起来，联系分析，寻求解题思路.

例 4： 已知数列｛a_n｝满足 $a_1=\dfrac{5}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n}$

（1）求证：2＜a_n<3；（2）求证：$a_{n+1}-2<\dfrac{1}{4}(a_n-2)$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

思路分析：（1）从 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n}$ 递推式看，应该从数列归纳法入手；（2）可用证不等式的放缩法来求解.

（1）①当 n=1 时，$a_1=\dfrac{5}{2}$，2＜a_1<3；

②设 n=k 时，2＜a_k<3，那么 n=k+1 时，$a_{k+1}-2=\dfrac{(a_k-2)^2}{2a_k}>0$

即 a_{k+1}>2，又 2＜a_k<3，所以 0＜a_k－2＜1,0＜$(a_k-2)^2$＜1，而 $2a_k$＞4，
故 a_{k+1}-2<1，即 a_{k+1}<3，
由①②知 2＜a_n<3

（2）由（1）知 0＜a_n－2＜1，$2a_n$＞4，$\therefore a_{n+1}-2=\dfrac{(a_n-2)^2}{2a_n}<\dfrac{a_n-2}{2a_n}<\dfrac{1}{4}(a_n-2)$

（3）$\because a_{n+1}-a_n=\dfrac{2}{a_n}-\dfrac{a_n}{2}<0$，∴$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ =x, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{2}{a_n})$

则 x=$\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$，又 x>0，∴ x=2，即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

点评：解决数列中的不等式问题，通常考虑用不等式的有关证明方法。（3）中应该注意到，若数列｛a_n｝的极限存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

演变 4: 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}(x\neq -1)$. 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=f(a_n)$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\ (n\in N^*)$，

(Ⅰ)用数学归纳法证明 $b_n\le\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$；(Ⅱ)证明 $S_n<\dfrac{2-\sqrt{3}}{3}$.

考查运用数学归纳法解决有关问题的能力.

专题小结

1、“巧用性质、减少运算量”在等差、等比数列的计算中非常重要，但用“基本量法”并树立“目标意识”，“需要什么，就求什么”，既要充分合理地运用条件，又要时刻注意题的目标，往往能取得与“巧用性质”解题相同的效果.

2、归纳——猜想——证明体现由具体到抽象，由特殊到一般，由有限到无限的辩证思想．学习这部分知识，对培养学生的逻辑思维能力，计算能力，熟悉归纳、演绎的论证方法，提高分析、综合、抽象、概括等思维能力，都有重大意义．

3、解答数列与函数的综合问题要善于综合运用函数方程思想、化归转化思想等数学思想以及特例分析法，一般递推法，数列求和及求通项等方法来分析、解决问题．

4、数列与解析几何的综合问题解决的策略往往是把综合问题分解成几部分，先利用解析几何的知识以及数形结合得到数列的通项公式，然后再利用数列知识和方法求解．

【活学巧练】

一． 选择题

1．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16, a_4=1,$ 则a_{12}的值是 （ ）

A．15　　B．30　　C．31　　D．64

2．已知数列$\{log_2(a_n-1)\}$（n∈N*）为等差数列，且 a_1＝3，a_2＝5，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{1}{a_3-a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)$ ＝ （ ）

A．2　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

3．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0, a_{n+1}=\dfrac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in N^*)$，则$a_{20}$=（ ）

A．0　　B．$-\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. 等比数列$\{a_n\}$的首项 a_1=－1，前 n 项和为 S_n,若$\dfrac{S_{10}}{S_5}=\dfrac{31}{32}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于( )

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$-\dfrac{2}{3}$　　C. 2　　D. －2

5．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16, a_4=1$，则 a_{12} 的值是（ ）

A．15　　B．30　　C．31　　D．64

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$＝( )

(A) 2　　(B) 4　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D)0

7．已知数列$\{x_n\}$满足$x_2=\dfrac{x_1}{2}$，$x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$，$n=3,4,\cdots$．若$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=2$，则$x_1=$

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．3　　C．4　　D．5

8．用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可得到 $n!$ 个不同的排列，每个排列为一行写成一个 $n!$ 行的数阵．对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$，记

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

$b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}++(-1)^n na_{in}$，$i=1,2,3,\cdots,n!$.例如：用 1，2，3 可得数阵如图，由于此数阵中每一列各数之和都是 12，所以，$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$，那么，在用 1，2，3，4，5 形成的数阵中，$b_1+b_2+\cdots+b_{120}$等于（　）

A．—3600　　B．1800　　C．—1080　　D．—720

二、填空题

9. 已知 $a,b,a+b$ 成等差数列，a,b,ab 成等比数列，且 $0<\log_m(ab)<1$,则 m 的取值范围是_________.

10. 等差数列$\{a_n\}$共有 $2n+1$ 项，其中奇数项之和为 319，偶数项之和为 290，则其中间项为_________.

11．设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n，若 S_{n+1},S_n，S_{n+2}成等差数列，则 q 的值为______________.

12．设 $z_n=(\frac{1-i}{2})^n$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $S_n=|z_2-z_1|+|z_3-z_2|+\cdots+|z_{n+1}-z_n|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$_________.

三、解答题：

13. 已知正项数列$\{a_n\}$,其前n项和S_n满足$10S_n=a_n{}^2+5a_n+6$,且a_1,a_2,a_{15}成等比数列，求数列$\{a_n\}$的通项a_n.

14. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，公差 $d\neq0$,由$\{a_n\}$中的部分项组成的数列$a_{b_1},a_{b_2},\cdots,a_{b_n},\cdots$为等比数列，其中 $b_1=1,b_2=5,b_3=17$.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)记 $T_n=C_n^1b_1+C_n^2b_2+C_n^3b_3+\cdots+C_n^nb_n$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T_n}{4^n+b^n}$.

15.（2006 年全国卷 I）设数列$\{a_n\}$的前n项的和$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}\times2^{n+1}+\frac{2}{3}$，$n=1,2,3,\cdots$

（Ⅰ）求首项a_1与通项a_n；（Ⅱ）设$T_n=\frac{2^n}{S_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i<\frac{3}{2}$

16. 设数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，前 n 项和 S_n 满足关系式：$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t(t>0,n=2,3,4\cdots)$.

(1)求证：数列$\{a_n\}$是等比数列；

(2)设数列$\{a_n\}$的公比为 $f(t)$，作数列$\{b_n\}$，使 $b_1=1,b_n=f(\frac{1}{b_{n-1}})(n=2,3,4\cdots)$，求数列$\{b_n\}$的通项 b_n；

(3)求和：$b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}$.

17．已知数列$\{a_n\}$的各项都是正数,且满足$:a_0=1,a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n),n\in N.$

（1）证明$a_n<a_{n+1}<2,n\in N$;（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

18．设点$A_n(x_n$，0)，$P_n(x_n,2^{n-1})$和抛物线C_n：$y=x^2+a_n\ x+b_n(n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $a_n=-2-4n-\frac{1}{2^{n-1}}$，$x_n$由以下方法得到：$x_1=1$，点 $P_2(x_2,2)$在抛物线 C_1：$y=x^2+a_1x+b_1$上，点 $A_1(x_1,0)$到 P_2的距离是 A_1到 C_1上点的最短距离，…，点$P_{n+1}(x_{n+1},2^n)$在抛物线C_n：$y=x^2+a_n\ x+b_n$上，点$A_n(x_n$，0)到P_{n+1}的距离是A_n到C_n 上点的最短距离．

(Ⅰ)求 x_2及 C_1的方程．　(Ⅱ)证明$\{x_n\}$是等差数列．

参考答案：

1．A　　提示：由$a_7+a_9=16$，得 $a_8=8$，$\therefore d=\frac{8-1}{8-4}=\frac{7}{4}$，$\therefore a_{12}=1+8\times\frac{7}{4}=15$.

2．**C**　**提示：**由题意得：$2\log_2^4=\log_2^2+\log_2^2+2d$,求得 d=1，

则$\log_2(a_n-1)=1+(n-1)1=n$，$\therefore a_n-1=2^n$,即$a_n=2^n-1$，

又由$\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2^{n+1}-2n}=\frac{1}{2^n}$

所以$\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{1}{a_3-a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n+1}-a_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1.$

3．B　提示：由 $a_1=0,a_{n+1}=\frac{a_n-\sqrt{3}}{\sqrt{3}a_n+1}(n\in N^+)$.得 $a_2=-\sqrt{3},a_3=\sqrt{3},a_4=0,\cdots\cdots$

由此可知：数列$\{a_n\}$是周期变化的,且三个一循环，所以可得:$a_{20}=a_2=-\sqrt{3}$.故选 B.

4. B　提示：$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，而 $a_1=-1$,故 $q\neq1$,$\therefore\frac{S_{10}-S_5}{S_5}=\frac{31-32}{32}=-\frac{1}{32}$,

根据等比数列性质知：S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$,…,也成等比数列，

且它的公比为 q^5,$\therefore q^5=-\frac{1}{32}$,即 $q=-\frac{1}{2}$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=-\frac{2}{3}$.答案：B

5．A　提示：由$a_7+a_9=16$,得 $a_8=8$,$\therefore d=\frac{8-1}{8-4}=\frac{7}{4}$,$\therefore a_{12}=1+8\times\frac{7}{4}=15$,选(A)

6．C　提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}$,选(C)

7．B　**提示 1**：特殊值法，当$x_1=3$时，$x_2=\frac{3}{2},x_3=\frac{9}{4},x_4=\frac{15}{8},x_5=\frac{33}{16},x_6=\frac{63}{32}$

由此可推测$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=2$，故选 B.

提示 2：$\because x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$，$\therefore x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$，

令$b_n=x_{n+1}-x_n$，则$b_n=b_1q^{n-1}=(x_2-x_1)(-\frac{1}{2})^{n-1}=-\frac{x_1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}=(-\frac{1}{2})^n x_1$

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$$

$$=x_1+\frac{-\frac{x_1}{2}\left[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\right]}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{2x_1}{3}+(-\frac{1}{2})^{n-1}\frac{x_1}{3}$$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x_1}{3}+(-\frac{1}{2})^{n-1}\frac{x_1}{3}\right]=\frac{2x_1}{3}=2$，$\therefore x_1=3$，故选 B.

8．C　提示：在用 1，2，3，4，5 形成的数阵中，每一列各数之和都是 360，

$$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=-360+2\times360-3\times360+4\times360-5\times360=-1080$$

9. (－∞,8)　　提示: 解出 a、b,解对数不等式即可. 答案: (－∞,8)

10. a_{11}=29　　提示: 利用 $S_{奇}/S_{偶}=\frac{n+1}{n}$ 得解. 答案: 第 11 项 a_{11}=29

11．－2　　提示：由题意可知 q≠1,∴可得 $2(1-q^n)=(1-q^{n+1})+(1-q^{n+2})$,即 $q^2+q-2=0$,解得 q=-2 或 q=1(不合题意,舍去),∴q=－2.

12．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　提示：设$c_n=|z_{n+1}-z_n|=|(\frac{1-i}{2})^{n+1}-(\frac{1-i}{2})^n|=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$,

$\therefore S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{2-\sqrt{2}}$，$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

13. 解: ∵$10S_n=a_n^2+5a_n+6$, ①　　∴$10a_1=a_1^2+5a_1+6$,解之得 a_1=2 或 a_1=3.
又 $10S_{n-1}=a_{n-1}^2+5a_{n-1}+6$(n≥2),②
由①－②得 $10a_n=(a_n^2-a_{n-1}^2)+6(a_n-a_{n-1})$,即$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-5)=0$
∵$a_n+a_{n-1}>0$, ∴$a_n-a_{n-1}=5$ (n≥2).
当 a_1=3 时,a_3=13,a_{15}=73. a_1, a_3,a_{15} 不成等比数列∴a_1≠3;
当 a_1=2 时, a_3=12, a_{15}=72, 有 $a_3^2=a_1a_{15}$, ∴a_1=2, ∴a_n=5n－3.
14. 解: (1)由题意知 $a_5^2=a_1\cdot a_{17}$，即$(a_1+4d)^2=a_1(a_1+16d)\Rightarrow a_1d=2d^2$,

$\because d\neq 0$,$\therefore a_1=2d$,数列$\{a_{b_n}\}$的公比 $q=\dfrac{a_5}{a_1}=\dfrac{a_1+4d}{a_1}=3$, $\therefore a_{b_n}=a_1\cdot 3^{n-1}$ ①

又 $a_{b_n}=a_1+(b_n-1)d=\dfrac{b_n+1}{2}a_1$ ②

由①②得 $a_1\cdot 3^{n-1}=\dfrac{b_n+1}{2}\cdot a_1$. $\because a_1=2d\neq 0$,$\therefore b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$.

(2)$T_n=C_n^1 b_1+C_n^2 b_2+\cdots+C_n^n b_n=C_n^1(2\cdot 3^0-1)+C_n^2\cdot(2\cdot 3^1-1)+\cdots+C_n^n(2\cdot 3^{n-1}-1)$

$=\dfrac{2}{3}(C_n^1+C_n^2\cdot 3^2+\cdots+C_n^n\cdot 3^n)-(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n)$

$=\dfrac{2}{3}[(1+3)^n-1]-(2^n-1)=\dfrac{2}{3}\cdot 4^n-2^n+\dfrac{1}{3}$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{4^n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot 4^n-2^n+\frac{1}{3}}{4^n+2\cdot 3^{n-1}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}-(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n}{1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}-(\frac{1}{4})^n}=\frac{2}{3}.$$

15. 解:(I)$a_1=S_1=\dfrac{4}{3}a_1-\dfrac{1}{3}\times 2^2+\dfrac{2}{3}$,解得:$a_1=2$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{4}{3}a_{n+1}-\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\left(2^{n+2}-2^{n+1}\right)\Rightarrow a_{n+1}+2^{n+1}=4\left(a_n+2^n\right)$

所以数列$\left\{a_n+2^n\right\}$是公比为 4 的等比数列

所以:$a_n+2^n=\left(a_1+2^1\right)\times 4^{n-1}$

得:$a_n=4^n-2^n$ (其中 n 为正整数)

(II)$S_n=\dfrac{4}{3}a_n-\dfrac{1}{3}\times 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}\left(4^n-2^n\right)-\dfrac{1}{3}\times 2^{n+1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^n-1\right)$

$T_n=\dfrac{2^n}{S_n}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2^n}{\left(2^{n+1}-1\right)\left(2^n-1\right)}=\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

所以:$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}T_i=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\frac{3}{2}$

16. 解:(1)由 $S_1=a_1=1$,$S_2=1+a_2$,得 $3t(1+a_2)-(2t+3)=3t$. $\therefore a_2=\dfrac{2t+3}{3t}$,$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+3}{3t}$.

又 $3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t$, ①

$3tS_{n-1}-(2t+3)S_{n-2}=3t$ ②

①-②得 $3ta_n-(2t+3)a_{n-1}=0$. $\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2t+3}{3t}$,$n=2,3,4\cdots$,

所以$\{a_n\}$是一个首项为 1 公比为$\dfrac{2t+3}{3t}$的等比数列;

(2)由 $f(t)=\dfrac{2t+3}{3t}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{t}$,得 $b_n=f(\dfrac{1}{b_{n-1}})=\dfrac{2}{3}+b_{n-1}$.

可见$\{b_n\}$是一个首项为 1，公差为$\frac{2}{3}$的等差数列．于是 $b_n=1+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{2n+1}{3}$；

(3)由 $b_n=\frac{2n+1}{3}$,可知$\{b_{2n-1}\}$和$\{b_{2n}\}$是首项分别为 1 和$\frac{5}{3}$，公差均为$\frac{4}{3}$的等差数列，

于是 $b_{2n}=\frac{4n+1}{3}$,

$\therefore b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-b_4b_5+\cdots+b_{2n-1}b_{2n}-b_{2n}b_{2n+1}$ ·

$=b_2(b_1-b_3)+b_4(b_3-b_5)+\cdots+b_{2n}(b_{2n-1}-b_{2n+1})$

$=-\frac{4}{3}(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}n(\frac{5}{3}+\frac{4n+1}{3})=-\frac{4}{9}(2n^2+3n)$.

17.【解】(1) 用数学归纳法证明：

1° 当 n=1 时，$a_0=1, a_1=\frac{1}{2}a_0(4-a_0)=\frac{3}{2}$，$\therefore a_0<a_1<2$，命题正确.

2° 假设 $n=k$ 时有 $a_{k-1}<a_k<2.$

$$则 n=k+1时, a_k-a_{k+1}=\frac{1}{2}a_{k-1}(4-a_{k-1})-\frac{1}{2}a_k(4-a_k)$$

$$=2(a_{k-1}-a_k)-\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_k)(a_{k-1}+a_k)=\frac{1}{2}(a_{k-1}-a_k)(4-a_{k-1}-a_k).$$

而 $a_{k-1}-a_k<0.$ $\quad 4-a_{k-1}-a_k>0,$ $\quad \therefore a_k-a_{k-1}<0.$

又 $a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k(4-a_k)=\frac{1}{2}[4-(a_k-2)^2]<2.$

$\therefore n=k+1$ 时命题正确.

由 1°、2° 知，对一切 n∈N 时有 $a_n<a_{n+1}<2.$

(2) 下面来求数列的通项：$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)=\frac{1}{2}[-(a_n-2)^2+4],$

所以 $2(a_{n+1}-2)=-(a_n-2)^2$

$$令 b_n=a_n-2, 则 b_n=-\frac{1}{2}b_{n-1}^2=-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}b_{n-2}^2)^2=-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2b_{n-1}^{2^2}=\cdots=-(\frac{1}{2})^{1+2+\cdots+2^{n-1}}b_n^{2^n},$$

又 $b_n=-1$，所以 $b_n=-(\frac{1}{2})^{2^n-1}$, 即 $a_n=2+b_n=2-(\frac{1}{2})^{2^n-1}$.

18．解：(Ⅰ)由题意,得 A(1,0),C_1：$y=x^2-7x+b_1$.

设点 P(x,y)是 C_1 上任意一点,则$|A_1P|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(x^2-7x+b_1)^2}$.

令 $f(x)=(x-1)^2+(x^2-7x+b_1)^2$，则 $f'(x)=2(x-1)+2(x^2-7x+b_1)(2x-7)$. 由题意得, $f'(x_2)=0$,

即 $2(x_2-1)+2(x_2{}^2-7x_2+b_1)(2x_2-7)=0.$ 又 $P_2(x_2,0)$在 C_1 上,$\therefore 2=x_2{}^2-7x_2+b_1$

解得 $x_2=3,b_1=14$.故 C_1 方程为 $y=x^2-7x+14$.

(Ⅱ)设 P(x,y)是 C_1 上任意一点,则$|A_nP|=\sqrt{(x-x_n)^2+y^2}=\sqrt{(x-x_n)^2+(x_n{}^2+a_nx+b_n)^2}$.

令 $g(x)=(x-x_n)^2+(x^2+a_nx+bn)^2$, 则 $g'(x)=2(x-x_n)+2(x^2+a_nx+b_n)(2x+a_n)$,由题意得,$g'(x_{n+1})=0$,

即$2(x_{n+1}-x_n)+2(x_{n+1}{}^2+a_nx_{n+1}+b_n)(2x_{n+1}+a_n)=0$,

又$\because 2^n=x_{n+1}^2+a_nx_{n+1}+b_n$,$\therefore(x_{n+1}-x_n)+2^n(2x_{n+1}+a_n)=0(n\geqslant 1)$,

即$(1+2^{n+1})x_{n+1}-x_n+2^na_n=0$, (*)

下面用数学归纳法证明 $x_n=2n-1$.

① 当 n=1 时,$x_1=1$,等式成立.

② 假设当 n=k 时,等式成立,即 $x_k=2k-1$.

则当 n=k+1 时,由(*)知$(1+2^{k+1})x_{k+1}-x_k+2^ka_k=0$, (*)

又 $a_k=-2-4k-\frac{1}{2^{k+1}}$,$\therefore x_{k+1}=\frac{x_k-2^ka_k}{1+2^{k+1}}=2k+1$.

即当 n=k+1,时等式成立.

由①②知,等式对 $n\in N^+$成立,$\therefore\{x_n\}$是等差数列.

【挑战自我】

已知 $f(x)=(x-1)^2$，$g(x)=4(x-1)$，数列｛a_n｝满足 $a_1=2$，$(a_{n+1}-a_n)g(a_n)+f(a_n)=0$。

(1) 用 a_n 表示 a_{n+1}；（2）求证：｛a_n-1｝是等比数列；（3）若 $b_n=3f(a_n)-g(a_{n+1})$，求$\{b_n\}$的最大项和最小项。

解：（1）$\because(a_{n+1}-a_n)g(a_n)+f(a_n)=0$，$f(a_n)=(a_n-1)^2$，$g(a_n)=4(a_n-1)$，

$\therefore(a_n-1)(4a_{n+1}-3a_n-1)=0$, 又 $a_1=2$，$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{1}{4}$。

（2）$\because a_{n+1}-1=\frac{3}{4}(a_n-1)$，$\therefore$｛$a_n-1$｝是以 $a_1-1=1$ 为首项，$\frac{3}{4}$ 为公比的等比数列。

（3）由（2）可知：$a_n-1=(\frac{3}{4})^{n-1}$，$\therefore a_n=(\frac{3}{4})^{n-1}+1$。

从而 $bn=3f(a_n)-g(a_{n+1})=3(\frac{3}{4})^{2n-2}-4(\frac{3}{4})^n=3\cdot(\frac{3}{4})^{n-1}[(\frac{3}{4})^{n-1}-1]$

因为 $y=(\frac{3}{4})^n$ 为减函数，所以 b_n 中的最大项为 $b_1=0$,

又 $b_n=3[(\frac{3}{4})^{n-1}-\frac{1}{2}]-\frac{3}{4}\geq-\frac{3}{4}$,

当 n 为整数时，$(\frac{3}{4})^{n-1}\neq\frac{1}{2}$，所以只须考虑$(\frac{3}{4})^{n-1}$接近于$\frac{1}{2}$。

当 n=3 时，$(\frac{3}{4})^{n-1}=\frac{9}{16}$与$\frac{1}{2}$相差$\frac{1}{16}$，当 n=4 时，$(\frac{3}{4})^{n-1}=\frac{27}{64}$与$\frac{1}{2}$相差$\frac{5}{64}$

而$\frac{5}{64}>\frac{1}{16}$，所以 b_n 中最小项为$b_3=-\frac{189}{256}$.

【答案及点拨】

演变 1：解法一： 将 $S_m=30,S_{2m}=100$ 代入 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,得：

$$\begin{cases} ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=30 & ① \\ 2ma_1+\frac{2m(2m-1)}{2}d=100 & ② \end{cases}$$

$$解得d=\frac{40}{m^2},a_1=\frac{10}{m}+\frac{20}{m^2},\therefore S_{3m}=3ma_1+\frac{3m(3m-1)}{2}d=210$$

解法二： 由等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和公式知，S_n 是关于 n 的二次函数，即 $S_n=An^2+Bn$(A、B 是常数）。

将 $S_m=30,S_{2m}=100$ 代入，得

$$\begin{cases} Am^2+Bm=30 \\ A(2m)^2+B\cdot 2m=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{20}{m^2} \\ B=\frac{10}{m} \end{cases},\therefore S_{3m}=A\cdot(3m)^2+B\cdot 3m=210$$

解法三： 根据等差数列性质知： $S_m,S_{2m}-S_m,S_{3m}-S_{2m}$ 也成等差数列，

从而有： $2(S_{2m}-S_m)=S_m+(S_{3m}-S_{2m})$， $\therefore S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210$

解法四： $\because S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$， $\therefore \frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$\therefore$点$(n, \frac{S_n}{n})$是直线 $y=\frac{(x-1)d}{2}+a_1$ 上的一串点，

由三点$(m,\frac{S_m}{m}),(2m, \frac{S_{2m}}{2m}),(3m, \frac{S_{3m}}{3m})$共线，易得 $S_{3m}=3(S_{2m}-S_m)=210$.

演变 2：（1） $f_1(0)=2$， $a_1=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$， $f_{n+1}(0)=f_1[f_n(0)]=\frac{2}{1+f_n(0)}$，

$$\therefore a_{n+1}=\frac{f_{n+1}(0)-1}{f_{n+1}(0)+2}=\frac{\frac{2}{1+f_n(0)}-1}{\frac{2}{1+f_n(0)}+2}=\frac{1-f_n(0)}{4+2f_n(0)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}=-\frac{1}{2}a_n$$

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}$，$\therefore$数列｛$a_n$｝上首项为$\frac{1}{4}$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，$a_n=\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

（2）$T_{2n}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2na_{2n}$,

$-\frac{1}{2}T_{2n}=(-\frac{1}{2})a_1+(-\frac{1}{2})2a_2+(-\frac{1}{2})3a_3+\cdots+(-\frac{1}{2})2na_{2n}$,

两式相减得：$\frac{3}{2}T_{2n}=\frac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^{2n}]}{1+\frac{1}{2}}+n\times\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^{2n-1}$，$T_{2n}=\frac{1}{9}(1-\frac{3n+1}{2^{2n}})$

当 n=1 时，$9T_{2n} < Q_n$；当 n=2 时，$9T_{2n} < Q_n$；

当 n≥3 时，$2^{2n}=[(1+1)^n]^2=(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)^2>(2n+1)^2$, $\therefore 9T_{2n}>Q_n$.

演变 3：（1）因为 $P_n(x_n,y_n)$、$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ 在抛物线上，故 ${x_n}^2=4y_n$, ① ${x_{n+1}}^2=4y_{n+1}$ ②，

又因为直线 P_nP_{n+1} 的斜率为 $\frac{1}{2^n}$，即 $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{2}$，①②代入可得

$$\frac{1}{4}\frac{x^2{}_{n+1}-x^2{}_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{2^n}\Rightarrow x_{n+1}+x_n=\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}=(x_{2n+1}+x_{2n})-(x_{2n}+x_{2n-1})=\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-3}}=-\frac{1}{2^{2n-2}},$$

故 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{4}\Rightarrow\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列；

（2）$S_n=-\frac{4}{3}(1-\frac{1}{4^n})\Rightarrow\frac{3}{4}S_n+1=\frac{1}{4^n}$，故只要比较 4^n 与 $3n+10$ 的大小.

方法（一）$4^n=(1+3)^n=1+C_n^1\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\cdots>1+3n+\frac{n(n-1)}{2}3^2>1+3n+9=3n+10(n\ge 3)$，

当 $n=1$ 时，$\frac{3}{4}S_n+1>\frac{1}{3n+10}$；　当 $n=2$ 时 $\frac{3}{4}S_n+1=\frac{1}{3n+10}$；

当 $n\ge 3, n\in N^*$ 时，$\frac{3}{4}S_n+1<\frac{1}{3n+10}$.

方法（二）用数学归纳法证明，其中假设 $n=k(k\ge 3,k\in N)$ 时有 $4^k>3k+10$，

则当 $n=k+1$ 时，$4^{k+1}=4\cdot 4^k>4(3k+10)=[3(k+1)+10]+9k+27>3(k+1)+10$.

演变 4：（Ⅰ）证明：当 $x\ge 0$ 时, $f(x)=1+\frac{2}{x+1}\ge 1$. 因为 $a_1=1$，所以 $a_n\ge 1(n\in N^*)$.

下面用数学归纳法证明不等式 $b_n\le\frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$.

（1）当 n=1 时，$b_1=\sqrt{3}-1$，不等式成立，

（2）假设当 n=k 时，不等式成立，即 $b_k\le\frac{(\sqrt{3}-1)^k}{2^{k-1}}$.

那么　$b_{k-1}=|a_{k+1}-\sqrt{3}|=\frac{(\sqrt{3}-1)|a_k-\sqrt{3}|}{1+a_k}\le\frac{\sqrt{3}-1}{2}b_k\le\frac{(\sqrt{3}-1)^{k+1}}{2^k}$.

所以，当 n=k+1 时，不等式也成立。

根据（1）和（2），可知不等式对任意 n∈N*都成立。

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）知，　$b_n\le\frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$.

所以 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n \le (\sqrt{3}-1) + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} + \cdots + \frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$

$$= (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} < (\sqrt{3}-1) \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

故对任意 $n \in N^*, S_n < \frac{2}{3}\sqrt{3}.$

【实战演练】

一、选择题

1． 如果-1，a，b, c, -9 成等比数列，那么

A．b=3, ac=9　　B. b=−3, ac=9　　C. b=3, ac=−9　　D. b=−3, ac=−9

2． 在等差数列｛a_n｝中，已知 a_1=2,a_2 +a_3 =13，则 a_4 +a_5 +a_6 等于

A.40　　B.42　　C.43　　D.45

3．（06 广东卷） 已知某等差数列共有 10 项，其奇数项之和为 15，偶数项之和为 30，则其公差为

A.5　　B.4　　C. 3　　D. 2

4． 若互不相等的实数 a,b,c 成等差数列，c,a,b 成等比数列，且 $a+3b+c=10$，则 $a=$

A．4　　B．2　　C．－2　　D．－4

5．（06 江西卷） 已知等差数列｛a_n｝的前 n 项和为 S_n，若 $\overrightarrow{OB} = a_1\overrightarrow{OA} + a_{200}\overrightarrow{OC}$，且 A、B、C 三点共线（该直线不过原点 O），则 S_{200}=（　　）

A．100　　B．101　　C. 200　　D. 201

6.（理科做）（06 湖南卷） 数列｛a_n｝满足: $a_1 = \frac{1}{3}$, 且对于任意的正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$ （　　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

(文科做)在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 前 n 项和为 S_n, 若数列 $\{a_n + 1\}$ 也是等比数列, 则 S_n 等于

A. $2^{n+1}-2$　　B. $3n$　　C. $2n$　　D. 3^n-1

7. 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=$

A．120　　B．105　　C．90　　D．75

8．**（06 全国 II）**设 S_n 是等差数列｛a_n｝的前 n 项和，若$\frac{S3}{S6}=\frac{1}{3}$，则$\frac{S6}{S12}=$

A. $\frac{3}{10}$　　　B. $\frac{1}{3}$　　　C. $\frac{1}{8}$　　　D. $\frac{1}{9}$

9．已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_2+a_8=8$,则该数列前 9 项和 S_9 等于(　　)

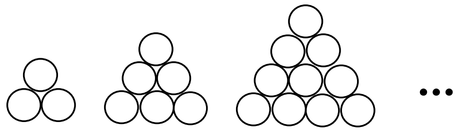
A.18　　　B.27　　　C.36　　　D.45

10．**（06 天津卷）**已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$都是公差为 1 的等差数列，其首项分别为a_1、b_1，且$a_1+b_1=5$，$a_1,b_1\in N^*$．设$c_n=a_{b_n}$（$n\in N^*$），则数列$\{c_n\}$的前 10 项和等于（　　）

A．55　　　B．70　　　C．85　　　D．100

二、填空题（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11．**（06 广东）**在德国不来梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商店橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品，其中第 1 堆只有 1 层，就一个球；第 $2,3,4,\cdots$ 堆最底层（第一层）分别按图 4 所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球，以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(3)=$______；$f(n)=$______（答案用 n 表示）．



12．若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n.n=1$，2，3…. 则 $a_1+a_2+\cdots+a_n=$____________.

13．**（06 江苏）**对正整数 n，设曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 x＝2 处的切线与 y 轴交点的纵坐标为a_n，则数列$\{\frac{a_n}{n+1}\}$的前 n 项和的公式是____

14．**（理科做）**数列｛$\frac{1}{4n^2-1}$｝的前 n 项和为 S_n，则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$＝______________

（文科做）设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_4＝14，S_{10}－S_7＝30，则 S_9＝________.

15．**（06 浙江）**设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_5=10, S_{10}=-5$,则公差为______（用数字作答）。

16．在数列｛a_n｝中，若 $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3\ (n\geqslant 1)$,则该数列的通项 a_n=_________.

三、解答题（共 4 小题，每小题 4 分，共 24 分）

17．若S_n是公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前n项和，且S_1,S_2,S_4成等比数列

（Ⅰ）求数列S_1,S_2,S_4的公比；

（Ⅱ）S_2=4，求$\{a_n\}$的通项公式。

18．**（06 四川）**数列$\{a_n\}$的前n项和记为$S_n, a_1=1, a_{n+1}=2S_n+1\left(n\geq 1\right)$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）等差数列$\{b_n\}$的各项为正，其前n项和为T_n，且$T_3=15$，又$a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3$成等比数列，求$T_n$

19.（06 湖北）已知二次函数$y=f(x)$的图像经过坐标原点，其导函数为$f'(x)=6x-2$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，点$(n,S_n)(n\in N^*)$均在函数$y=f(x)$的图像上。

（Ⅰ）、求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）、设$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，T_n是数列$\{b_n\}$的前 n 项和，求使得$T_n<\frac{m}{20}$对所有$n\in N^*$都成立的最小正整数 m；

20．（理科做）（06 江西）已知数列｛a_n｝满足：$a_1=\frac{3}{2}$，且$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$（$n\geq 2$，$n\in N^*$）

（1）　求数列｛a_n｝的通项公式；
（2）　证明：对于一切正整数 n，不等式$a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

（文科做）**（06 福建）**已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n(n\in N^*)$.

（I）证明：数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列；

（II）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若数列$\{b_n\}$满足$4^{b_1-1}4^{b_2-1}\ldots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}(n\in N^*)$，证明$\{b_n\}$是等差数

答案与点拨：

1 B 解：由等比数列的性质可得 ac＝（－1）×（－9）＝9，b×b＝9 且 b 与奇数项的符号相同，故 b＝－3，选 B

2 B 解：在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=2, a_2+a_3=13, \therefore$ d=3，a_5=14，$a_4+a_5+a_6=3a_5=42$，选 B.

3 D 解：$\begin{cases}5a_1+20d=15\\5a_1+25d=30\end{cases}\Rightarrow d=3$，故选 C.

4　D 解：由互不相等的实数 a,b,c 成等差数列可设 a＝b－d，c＝b＋d，由 $a+3b+c=10$ 可得 b＝2，所以 a＝2－d，c＝2＋d，又 c,a,b 成等比数列可得 d＝6，所以 a＝－4，选 D

5　A 解：依题意，$a_1+a_{200}=1$，故选 A

6　（理）A　解析： 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{3}$，且对任意正整数 m,n 都有 $a_{m+n}=a_m\cdot a_n$ $a_2=a_{1+1}=a_1\cdot a_1=\frac{1}{9}$，$a_{n+1}=a_n\cdot a_1=\frac{1}{3}a_n$，∴数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{2}$，选 A.

（文）C　解：因数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等比，则 $a_n=2q^{n-1}$，因数列 $\left\{a_n+1\right\}$ 也是等比数列，

则 $(a_{n+1}+1)^2=(a_n+1)(a_{n+2}+1)\Rightarrow {a_{n+1}}^2+2a_{n+1}=a_na_{n+2}+a_n+a_{n+2}\Rightarrow a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$
$\Rightarrow a_n(1+q^2-2q)=0\Rightarrow q=1$

即 $a_n=2$，所以 $S_n=2n$，故选择答案 C。

7　B 解：$\left\{a_n\right\}$ 是公差为正数的等差数列，若 $a_1+a_2+a_3=15$，$a_1a_2a_3=80$，则 $a_2=5$，$a_1a_3=(5-d)(5+d)=16$，∴ d=3，$a_{12}=a_2+10d=35$，$a_{11}+a_{12}+a_{13}=105$，选 B.

8　A　解: 由等差数列的求和公式可得 $\frac{S_3}{S_6}=\frac{3a_1+3d}{6a_1+15d}=\frac{1}{3}$,可得 $a_1=2d$ 且 $d\neq0$

所以 $\frac{S_6}{S_{12}}=\frac{6a_1+15d}{12a_1+66d}=\frac{27d}{90d}=\frac{3}{10}$,故选 A

点评：本题主要考察等比数列的求和公式,难度一般

9 C 解： 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2+a_8=8$，∴ $a_1+a_9=8$，则该数列前 9 项和 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=36$，选 *C*

10　C 解: 数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 都是公差为 1 的等差数列，其首项分别为 a_1、b_1，且 $a_1+b_1=5$，$a_1,b_1\in N^*$．设 $c_n=a_{b_n}$（$n\in N^*$），则数列 $\{c_n\}$ 的前 10 项和等于 $a_{b_1}+a_{b_2}+\cdots+a_{b_{10}}=a_{b_1}+a_{b_1+1}+\cdots+a_{b_1+9}$，$a_{b_1}=a_1+(b_1-1)=4$，∴ $a_{b_1}+a_{b_1+1}+\cdots+a_{b_1+9}$ $=4+5+6+\cdots+13=85$，选 C.

11　$f(3)=10$，$f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

12　2^n-1　解：数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：$a_1=1,a_{n+1}=2a_n$, $n=1$，2，3…，该数列为公比为 2 的等

比数列，∴ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$.

13　2^{n+1}-2　点拨：本题考查应用导数求曲线切线的斜率，数列通项公式以及等比数列的前 n 项和的公式

解：$y'=nx^{n-1}-(n+1)x^n$，曲线 $y=x^n(1-x)$ 在 x=2 处的切线的斜率为 $k=n2^{n-1}-(n+1)2^n$

切点为（2，-2^n）,所以切线方程为 $y+2^n=k(x-2)$,令 x=0 得 $a_n=(n+1)2^n$,令 $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}=2^n$. 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$的前 n 项和为 $2+2^2+2^3+\ldots+2^n=2^{n+1}-2$

解后反思：应用导数求曲线切线的斜率时，要首先判定所经过的点为切点。否则容易出错。

14 （理）$\dfrac{1}{2}$　解：$a_n=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)\bullet(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

故$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

（文）解：设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，由题意得$4a_1+\dfrac{4(4-1)}{2}d=14$,

$[10a_1+\dfrac{10(10-1)}{2}d]-[7a_1+\dfrac{7(7-1)}{2}d]=30$，联立解得 $a_1=2,d=1$，所以 $S_9=9\times2+\dfrac{9(9-1)}{2}\cdot1=54$

15 －1 **点拨：**本题考查等差数列的前n项和，基础题。

解：设首项为a_1，公差为d，由题得

$$\begin{cases}5a_1+10d=10\\10a_1+45d=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2d=2\\2a_1+9d=-1\end{cases}\Rightarrow 9d-4d=-1-4\Rightarrow d=-1$$

反思：数学问题解决的本质是，你已知什么？从已知出发又能得出什么？完成了这些，也许水到渠成了。本题非常基础，等差数列的前n项和公式的运用自然而然的就得出结论。

16　$2^{n+1}-3$　**解**：在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3(n\ge1)$，∴

$a_{n+1}+3=2(a_n+3)(n\ge1)$，即{$a_n+3$}是以$a_1+3=4$为首项，2 为公比的等比数列，

$a_n+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$，所以该数列的通项$a_n=2^{n+1}-3$.

17 解：（Ⅰ）设数列$\{a_n\}$的公差为d,由题意，得 $S_2{}^2=S_1\cdot S_4$□

所以$(2a_1+d)^2=a_1(4a_1+6d)$，因为$d\neq 0$，所以 $d=2a_1$ ，故公比$q=\dfrac{S_2}{S_1}=4$

（Ⅱ）因为$S_2=4, d=2a_1, S_2=2a_1+2a_1=4a_1,$

所以$a_1=1, d=2$，因此$a_2=a_1+(n-1)d=2n-1.$

点拨：本题主要考察等差、等比数列的基本知识、考查运算及推理 能力。

18 解：（Ⅰ）由 $a_{n+1}=2S_n+1$ 可得 $a_n=2S_{n-1}+1\ (n\geq 2)$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n, a_{n+1}=3a_n\ (n\geq 2)$

又$a_2=2S_1+1=3$ $\therefore a_2=3a_1$

故$\{a_n\}$是首项为1，公比为3得等比数列

$\therefore a_n=3^{n-1}$

（Ⅱ）设$\{b_n\}$的公比为d

由$T_3=15$得，可得$b_1+b_2+b_3=15$，可得$b_2=5$

故可设$b_1=5-d, b_3=5+d$

又$a_1=1, a_2=3, a_3=9$

由题意可得$(5-d+1)(5+d+9)=(5+3)^2$

解得$d_1=2, d_2=10$

$\because$等差数列$\{b_n\}$的各项为正，$\therefore d>0$

$\therefore d=2$

$\therefore T_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+2n$

点拨：本小题主要考察等差数列、等比数列的基础知识，以及推理能力与运算能力。

19 解：（Ⅰ）设这二次函数 $f(x)=ax^2+bx\ (a\neq 0)$,则 $f`(x)=2ax+b$,由于 $f`(x)=6x-2$,得

$a=3$， $b=-2$，所以 $f(x)=3x^2-2x$.

又因为点$(n,S_n)(n\in N^*)$均在函数$y=f(x)$的图像上，所以$S_n=3n^2-2n$.

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-2n)-\left[3(n-1)^2-2(n-1)\right]=6n-5$.

当$n=1$时，$a_1=S_1=3\times 1^2-2=6\times 1-5$，所以，$a_n=6n-5$ （$n\in N^*$）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得知$b_n=\dfrac{3}{a_na_{n+1}}=\dfrac{3}{(6n-5)[6(n-1)-5]}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{6n-5}-\dfrac{1}{6n+1})$，

故$T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=\dfrac{1}{2}\left[(1-\dfrac{1}{7})+(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{13})+\ldots+(\dfrac{1}{6n-5}-\dfrac{1}{6n+1})\right]=\dfrac{1}{2}（1-\dfrac{1}{6n+1}）$.

因此，要使$\dfrac{1}{2}（1-\dfrac{1}{6n+1}）<\dfrac{m}{20}$ （$n\in N^*$）成立的m,必须且仅须满足$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{m}{20}$，即$m\geqslant 10$，所以满足要求的最小正整数$m$为10.

20（理）解：（1）将条件变为：$1-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{3}(1-\dfrac{n-1}{a_{n-1}})$，因此$\{1-\dfrac{n}{a_n}\}$为一个等比数列，其首项为

$1-\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$，公比$\dfrac{1}{3}$，从而$1-\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{1}{3^n}$，据此得$a_n=\dfrac{n\bullet 3^n}{3^n-1}$ （$n\geq 1$）…………1°

（2）证：据1°得，$a_1\bullet a_2\bullet\cdots a_n=\dfrac{n!}{(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})}$

为证$a_1\bullet a_2\bullet\cdots\cdots a_n<2\bullet n!$

只要证$n\in N^*$时有$(1-\dfrac{1}{3})\bullet(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{3^n})>\dfrac{1}{2}$…………2°

显然，左端每个因式都是正数，先证明，对每个$n\in N^*$，有

$(1-\dfrac{1}{3})\bullet(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{3^n})\geq 1-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n})$…………3°

用数学归纳法证明3°式：

（i） $n=1$时，3°式显然成立，

（ii） 设$n=k$时，3°式成立，

即$(1-\dfrac{1}{3})\bullet(1-\dfrac{1}{3^2})\cdots(1-\dfrac{1}{3^k})\geq 1-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^k})$

则当$n=k+1$时，

$(1-\dfrac{1}{3})\bullet(1-\dfrac{1}{3^2})\bullet\cdots(1-\dfrac{1}{3^k})\bullet(1-\dfrac{1}{3^{k+1}})\geq〔1-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^k})〕\bullet(1-\dfrac{1}{3^{k+1}})$

$=1-（\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}）-\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{3^{k+1}}（\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}）$

$\geq 1-（\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^{k+1}}）$即当 $n=k+1$ 时，3°式也成立。

故对一切 $n\in N^*$，3°式都成立。

利用 3°得，$(1-\frac{1}{3})\bullet(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^n})\geq 1-（\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}）=1-\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}$

$=1-\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n>\frac{1}{2}$

故 2°式成立，从而结论成立。

列。

（文）解：本小题主要考查数列、不等式等基本知识，考查化归的数学思想方法，考查综合解题能力。

（I）证明：$\because a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n),$

$\because a_1=1, a_2=3,$

$\therefore \frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2(n\in N^*).$

$\therefore \{a_{n+1}-a_n\}$是以 $a_2-a_1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列。

（II）解：由（I）得 $a_{n+1}-a_n=2^n(n\in N^*),$

$\therefore a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+...+(a_2-a_1)+a_1$

$=2^{n-1}+2^{n-2}+...+2+1$

$=2^n-1(n\in N^*).$

（III）证明：$\because 4^{b_1-1}4^{b_2-1}...4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n},$

$\therefore 4^{(b_1+b_2+...+b_n)}=2^{nb_n},$

$\therefore 2[(b_1+b_2+...+b_n)-n]=nb_n,$ ①

$2[(b_1+b_2+...+b_n+b_{n+1})-(n+1)]=(n+1)b_{n+1}.$ ②

②-①，得 $2(b_{n+1}-1)=(n+1)b_{n+1}-nb_n,$

即 $(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0.$ ③

$nb_{n+2}-(n+1)b_{n+1}+2=0.$ ④

④－③，得 $nb_{n+2}-2nb_{n+1}+nb_n=0,$

即 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0,$

$\therefore b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n(n\in N^*),$

$\therefore\{b_n\}$ 是等差数列。