第 1–7 节　数列极限的例题和习题

下面的例题和习题都是数列极限理论中的著名习题，初学者能够完全读懂其中例题的证明是不容易的，能够独立完成后面那些习题就更不容易. 因此，你可以先粗读一下(因为不管你读懂多少，都暂时不会影响到你学习微积分)，有兴趣的读者等有空时或假期中再去细读它. 读一读它，你会在做题方法上受到严格的训练.

称一个数列 $x_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为无穷小量，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，用“$\varepsilon-N$”说法，就是它满足条件：

任意给定正数 ε，都有对应的正整数 $N=N(\varepsilon)$，当 $n\ge N$ 时，$\lvert x_n\rvert\le\varepsilon$.

称一个数列 $x_n\,(n=1,2,\cdots)$ 为无穷大量，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$，用“$M-N$”说法，就是它满足条件：

任意给定正数 M，都有对应的正整数 $N=N(M)$，当 $n\ge N$ 时，$\lvert x_n\rvert\ge M$.

特别，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$，就是它满足条件：

任意给定正数 M，都有对应的正整数 $N=N(M)$，使当 $n\ge N$ 时，$x_n\ge M$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$，就是它满足条件：

任意给定正数 M，都有对应的正整数 $N=N(M)$，使当 $n\ge N$ 时，$x_n\le -M$.

无穷大量与无穷小量是两个对偶的概念，即当 $x_n\ne 0\,(n=1,2,\cdots)$ 时，

若 x_n 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{x_n}$ 是无穷小量；若 x_n 是无穷小量，则 $\dfrac{1}{x_n}$ 是无穷大量.

在第 0 章(看我做题)中，那些有关数列极限的习题，如果说可以凭借直觉和四则运算规则能够做出来的话，那么下面这些结论，就必须用“$\varepsilon-N$”说法才能够证明. 你看一看其中的证明，可以学习到如何用“$\varepsilon-N$”说法做数列极限证明题的方法.

例 1　设有数列 $x_n\,(n=1,2,\cdots)$. 证明：若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，则算术平均值的数列

$$y_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ (n=1,2,\cdots)$$

也有极限且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. 考虑

$$y_n-a=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a=\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}$$

任意给定正数 ε. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，所以有正整数 N_1 使 $\lvert x_n-a\rvert\le\dfrac{\varepsilon}{2}\,(n\ge N_1)$. 于是，

$$|y_n-a|=\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|$$
$$=\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{N_1-1}-a)+(x_{N_1}-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|$$
$$\le\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{N_1-1}-a)}{n}\right|+\frac{(n-N_1+1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\le\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_{N_1-1}-a)}{n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$$

再取正整数$N\ge N_1$足够大，使当$n\ge N$时，右边第一项也小于$\varepsilon/2$．这样，当$n\ge N$时，就会有$|y_n-a|\le \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$，即证明了有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a=\lim_{n\to\infty}x_n$$

请注意：有极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，不一定有极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$！考虑数列

$$x_n:1,0,1,0,1,0,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots$$

【应用】作为例 1 的应用，例如

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例 2　若$x_n>0(n=1,2,\cdots)$且有极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则几何平均值的数列

$$z_n=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ (n=1,2,\cdots)$$

也有极限且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证　根据极限单调性，必有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge 0$．首先设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\varepsilon$为任意给定的正数. 先取正整数$N_1$使$x_n\le\eta=\varepsilon/2\ (n>N_1)$，则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{N_1}\cdots x_n}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{N_1}\cdot\eta^{n-N_1}}=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{N_1}}\cdot\eta^{\frac{n-N_1}{n}}\to\eta=\frac{\varepsilon}{2}\ (n\to\infty)$$

（你知道为什么吗？见第 0 章题 33）

因此，必有正整数$N\ge N_1$，使当$n\ge N$时，$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0=\lim_{n\to\infty}x_n$$

【注】假若你知道“**几何平均值不超过算术平均值**”的话，根据例 1 的结论，则有

$$0\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to 0(n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

其次，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$，$\varepsilon$ 为任意给定的正数(不妨认为 $\varepsilon<1$). 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{a}=1$，所以有正整数 N 使

$$1-\varepsilon\le\frac{x_n}{a}\le1+\varepsilon\ (n>N)$$

从而有

$$\sqrt[n]{\frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a}\cdots\frac{x_N}{a}}\cdot(1-\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}\le\frac{z_n}{a}=\sqrt[n]{\frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a}\cdots\frac{x_n}{a}}\le\sqrt[n]{\frac{x_1}{a}\frac{x_2}{a}\cdots\frac{x_N}{a}}\cdot(1+\varepsilon)^{\frac{n-N}{n}}$$

让 $n\to\infty$，则得

$$1-\varepsilon\le\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{a}\le1+\varepsilon\quad\text{（你知道为什么吗？见第 0 章题 33）}$$

由于正数 ε 可以任意地小，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z_n}{a}=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

【应用】作为上述结论的应用，若 $x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$ 且有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$，则也有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{x_1}{1}\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}\underset{(例2)}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

请你根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$，求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ (答案：e)； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}$ (答案：$\dfrac{e}{4}$).

例 3 设有数列 $x_n\,(n=1,2,\cdots)$.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则必有单调增大数列 y_n，使 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_nx_n)=0$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则必有单调减小数列 y_n，使 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_nx_n)=+\infty$.

证 下面证明(1). 你可用类似的方法证明(2).

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 根据数列极限的定义，必有正整数 N_1 使 $|x_n|\le\dfrac{1}{2}\,(n\ge N_1)$；同理，必有正整数 $N_2>N_1$ 使 $|x_n|\le\dfrac{1}{2^2}\,(n\ge N_2)$. 一般地，必有正整数 $N_{k+1}>N_k$ 使

$$\left|x_n\right| \le \frac{1}{2^{k+1}}(n \ge N_{k+1}; k = 1,2,\cdots)$$

现在，当$n < N_1$时，取$y_n = 0$；当$N_1 \le n < N_2$时，取$y_n = 1$；一般地，当$N_k \le n < N_{k+1}$时，取$y_n = k(k = 1,2,\cdots)$. 显然，数列y_n是单调增大的且$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$；　另一方面，由于

$$| y_n x_n | = | y_n || x_n | \le \frac{k}{2^k}(N_k \le n < N_{k+1}; k = 1,2,\cdots)$$

所以有

$$0 \le \lim_{n\to\infty} | y_n x_n | \le \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2^k} = 0 \text{（见第 0 章题 32）}$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n x_n) = 0$.

【注】这里是根据数列极限的定义，构造出了一个满足题中要求的数列y_n. 在数学中，称这种证明方法为“构造性证明”.

例 4　海因定理（函数极限与数列极限的关系）

(1) 有极限$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$的充分必要条件是：对于以$a$为极限的任何数列$x_n(\ne a)$，都有极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$；

(2) 有极限$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$的充分必要条件是：对于任何数列$x_n \to \infty(n \to \infty)$，都有极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

证　为简单起见，下面证明结论(1). 你可用类似的方法证明结论(2).

设ε为给定的任意正数. 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，则有正数$\delta$，

（※）当$0 < | x - a | \le \delta$时，有$| f(x) - A | \le \varepsilon$

又因为$x_n \ne a$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，所以有正整数$N$，当$n \ge N$时，$0 < | x_n - a | \le \delta$；根据结论（※），

$$| f(x_n) - A | \le \varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

反之，设上面(1)中的条件满足.（反证法）假若A不是函数$f(x)$在点a的极限，用“$\varepsilon - \delta$”的话说，就是：至少有一个正数ε_0，不论取正数δ多么小，总有对应的点x_δ，使

$$0 < | x_\delta - a | \le \delta \text{，但} | f(x_\delta) - A | > \varepsilon_0 .$$

于是，当取正数$\delta_n = 1/n\,(n = 1,2,\cdots)$时，就会有相对应的点$x_n(n = 1,2,\cdots)$，使

$$0 < | x_n - a | \le \frac{1}{n} \text{，但} \left| f(x_n) - A \right| > \varepsilon_0 > 0 .$$

这说明，虽然有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，但$A$不是数列$f(x_n)$的极限，这与假设$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$矛盾.

【注】海因定理就像是架在函数极限与数列极限之间的一座“桥梁”，沟通了两者之间的关系. 因此，不仅可以把数列极限看作函数极限的特例，而且函数极限的某些结论，根据海因定理，

可以用数列极限的相应结论来证明. 在有的微积分教科书中，先讲数列极限的理论，然后根据海因定理，把有关数列极限的结论转移到函数极限上.

回答问题

(1) 一个数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 的前面有限个项(如 $x_1,x_2,\cdots,x_m$)，对该数列是否有极限或有极限时的极限值有影响吗？

(2) 正数数列的极限一定是正数吗？

(3) 若 $x_n > y_n(n=1,2,\cdots)$ 且有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 还是有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$？

(4) 有界数列一定有极限吗？无界数列一定没有极限吗？

(5) 若数列 x_n 和 y_n 都没有极限，那么数列 (x_n+y_n) 与 $x_n y_n$ 一定也没有极限吗？

(6) 若数列 x_n 有极限，而数列 y_n 没有极限，那么你对数列 (x_n+y_n) 是否有极限，可以做出什么结论？

(7) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|c|$ 吗？反之如何？

<u>答案</u>：(1)没有；(2)不一定，例如正数数列 $\frac{1}{n}$ 的极限是 0；(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；(4)有界数列不一定有极限，例如 $x_n=(-1)^n$ 就没有极限；无界数列一定没有极限，因为有极限的数列是有界数列；(5)不一定，例如 $x_n=(-1)^n, y_n=(-1)^{n-1}$，则 (x_n+y_n) 与 $x_n y_n$ 都有极限；(6)一定没有极限. (反证法)若 (x_n+y_n) 有极限，则 $y_n=(y_n+x_n)-x_n$ 也有极限，与数列 y_n 没有极限矛盾. (7)是，因为 $||x_n|-|c|| \leq |x_n-c|$；反之不成立.

习题・提示和选解

1. 下面的习题都出现在第0章(看我做题)中，你不会做时，可去再看一下那里的做法. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max\{a,b\}$(其中 $a>0,\ b>0$)；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}}=1$.

2. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k}{3n^2+k}=\dfrac{1}{6}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{k^2}{3n^3+k}=\dfrac{1}{9}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{n^k+1}}=1$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n}\dfrac{1}{\sqrt[k]{n^k-1}}=1$.

提示:用夹挤规则证.

3. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则也有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

提示：参考例 1 的证明.

4. 设有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.　证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab$$

提示：设 $x_n = a + \alpha_n\ (\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0)$, $y_n = b + \beta_n\ (\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0)$，则

$$x_k y_{n-k+1} = (a + \alpha_k)(b + \beta_{n-k+1}) = ab + a\beta_{n-k+1} + b\alpha_k + \alpha_k \beta_{n-k+1}$$

于是，

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 = \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_{n-k+1} = nab + a\sum_{k=1}^{k=n} \beta_{n-k+1} + b\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k + \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k \beta_{n-k+1}$$

5. 设 $y_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ 且 $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = s_n \to +\infty (n \to \infty)$. 证明：若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，则也有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

提示：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$，则 $x_n = c + \alpha_n\ (\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0)$.　于是，

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} x_k y_k}{s_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} (c + \alpha_k) y_k}{s_n} = c + \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=n} \alpha_k y_k}{s_n}$$

6. 设 $y_n > 0\,(n = 1, 2, \cdots)$ 且

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = s_n \to +\infty (n \to \infty)$$

证明：若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$，则也有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

提示：用 x_n / y_n 替换上一题中的 x_n.

7. 施笃兹(Stolz)定理　若数列 x_n 与 y_n 满足条件：

(i) $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n < \cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$；

(ii) 有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$；

则也有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

证　令 $z_1 = y_1, z_n = y_n - y_{n-1} (n = 2, \cdots)$，则 $z_n > 0\,(n \ge 2)$ 且

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = y_n \to +\infty \ (n \to \infty)$$

再令 $w_1 = x_1, w_n = x_n - x_{n-1}\ (n = 2,3,\cdots)$ ，则

$$\frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \frac{x_n}{y_n} \quad （※）$$

根据假设条件(ii)，有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{w_n}{z_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ ，而根据上式(※)和题 6，则有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{w_n}{z_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

【注】作为施笃兹定理的应用，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}\ （p \text{ 为正整数}） = \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{n^{p+1} - \left[n^{p+1} - (p+1)n^p + \dfrac{(p+1)p}{2!}n^{p-1} - \cdots + (-1)^{p+1}\right]} = \frac{1}{p+1}$$

8. 设有数列 $x_n\ (n = 1,2,\cdots)$. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

证 设 ε 为任意给定的正数. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$ ，所以有正整数 K ，使

$$|x_n - x_{n-2}| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad （n \ge K）$$

于是，当 $n \ge K$ 时，

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= (x_n - x_{n-2}) - (x_{n-1} - x_{n-2}) = (x_n - x_{n-2}) + (-1)\left[(x_{n-1} - x_{n-3}) - (x_{n-2} - x_{n-3})\right] \\
&= (x_n - x_{n-2}) + (-1)(x_{n-1} - x_{n-3}) + (-1)^2(x_{n-2} - x_{n-3}) \\
&= (x_n - x_{n-2}) + (-1)(x_{n-1} - x_{n-3}) + (-1)^2\left[(x_{n-2} - x_{n-4}) - (x_{n-3} - x_{n-4})\right] \\
&= (x_n - x_{n-2}) + (-1)(x_{n-1} - x_{n-3}) + (-1)^2(x_{n-2} - x_{n-4}) + \cdots \\
&\qquad + (-1)^{n-K-1}(x_{K+1} - x_{K-1}) + (-1)^{n-K}(x_K - x_{K-1})
\end{aligned}$$

因此，当 $n \ge K$ 时，$|x_n - x_{n-1}| \le (n-K)\dfrac{\varepsilon}{2} + |x_K - x_{K-1}|$，从而有

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} \le \frac{n-K}{n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_K - x_{K-1}|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_K - x_{K-1}|}{n} \quad (n \ge K)$$

再取正整数 $N\ (\ge K)$ 足够大，使当 $n \ge N$ 时，$\dfrac{|x_K - x_{K-1}|}{n} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是，当 $n \ge N\ (\ge K)$ 时，

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_K - x_{K-1}|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

9. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n\ (x_n \ge 0)$ 收敛，且通项 x_n 单调减小，证明 $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$.

证　因为 $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n\ (x_n \ge 0)$ 收敛，所以余和

$$r_m = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots \to 0 (m\to\infty) \text{（见下注）}$$

对于 $n>m$，由于通项 x_n 单调减小，所以有

$$(n-m)x_n \le x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n \le r_m \text{，即}\quad x_n \le \frac{r_m}{n-m}\ (n>m)$$

于是，当 $n \ge 2m$ 时，

$$0 \le n x_n \le \frac{n}{n-m} r_m = \frac{n}{\frac{n}{2} + (\frac{n}{2} - m)} r_m \le \frac{n}{\frac{n}{2}} r_m = 2r_m$$

任意给定正数 ε，先取 m 足够大，使 $r_m \le \varepsilon/2$，再取正整数 $N \ge 2m$，则当 $n \ge N$ 时，

$$0 \le n x_n \le 2r_m \le \varepsilon$$

即 $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$

【注】设级数 $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n = s$，余和 $r_m = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots = s - s_m$，则

$$\lim_{m\to\infty} r_m = s - \lim_{m\to\infty} s_m = s - s = 0$$

在求方程的近似解时，常常会得到叠代数列（逐次逼近数列）. 当它收敛时，它能够逐步接近精确解. 因此，就需要研究叠代数列的收敛性（不必求出数列的极限值），有时还可以进一步求出叠代数列的极限值. 例如，

10. 研究数列 x_n 的收敛性. 若收敛，试求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

(1) 设 $x_0 = a$ 和 $x_1 = b$ 为已知实数. 令

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$$

解

$$x_2 - x_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} - x_1 = \frac{x_0 - x_1}{2} = (-1)\frac{b-a}{2},$$

$$x_3 - x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} = (-1)^2\frac{b-a}{2^2},$$

$$x_4 - x_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{2} = (-1)^3\frac{b-a}{2^3},$$

$$\vdots$$

一般地，$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{b-a}{2^{n-1}}$. 将以上这些等式依次相加，则得

$$x_n - x_1 = \left[\frac{-1}{2} + \frac{(-1)^2}{2^2} + \frac{(-1)^3}{2^3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right](b-a)$$

$$= \frac{\frac{-1}{2} - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \cdot \frac{-1}{2}}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}(b-a) = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2^n}}{\frac{3}{2}}(b-a) \to -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}(b-a) = \frac{1}{3}(a-b)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_1) = \dfrac{a-b}{3}$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a-b}{3} + x_1 = \frac{a-b}{3} + b = \frac{a+2b}{3}$$

(2) 设 $x_1 = c > 0$. $x_{n+1} = \dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$

提示:一方面，$0 < x_{n+1} < 3$ $(n=1,2,\cdots)$；另一方面，对于任何 $n \geq 2$，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - \frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}} = \frac{6(x_n - x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}$$

即 $(x_{n+1} - x_n)$ 与 $(x_n - x_{n-1})$ 具有相同的符号. 因此，数列 x_n $(n \geq 2)$ 是单调增大或单调减小的有界数列.

答案：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$.

(3) 设实数 $c \geq 0$. $x_1 = \dfrac{c}{2}$，$x_{n+1} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{x_n^2}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$

提示:首先指出，假如有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，在 $x_{n+1} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{x_n^2}{2}$ 两端取极限，则得二次方程

$$a^2 - 2a + c = 0$$

解得 $a = 1 \pm \sqrt{1-c}$. 因此，当 $c > 1$ 时，数列 x_n 没有极限. 剩下来就是讨论 $0 \leq c \leq 1$ 的情形. 在这种情形下，$0 \leq x_n \leq 1$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $x_{n+1} \geq x_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

答案：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - \sqrt{1-c}$.

11. 设 $b > a > 0$. 数列 x_n 和 y_n $(n=1,2,\cdots)$ 由下式所确定：

$$x_1 = a, \ y_1 = b, \ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

证明它们有公共极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \mu(a,b)$$ ［称它为数 a 和 b 的**算术–几何平均数**］

证 因为 $b > a > 0$，所以

$$x_2 = \sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{ab} > \sqrt{aa} = a = x_1, \quad y_2 = \frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b = y_1$$

又因为$\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$，因此得$x_1<x_2<y_2<y_1$．我们用相同的方法，可以证明一般的不等式

$$x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\ (n=1,2,\cdots)$$

根据单调有界原理，有极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty}y_n=\beta$$

在$y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$两端让$n\to\infty$，则得$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$．因此，$\alpha=\beta$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha=\beta=\lim_{n\to\infty}y_n$$

我们就把这个公共极限值记成$\mu(a,b)$.

【注】德国数学家高斯(Gauss)求出了这个极限值$\mu(a,b)$，即$\mu(a,b)=\dfrac{\pi}{2G}$，其中

$$G=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}\mathrm{d}x$$（椭圆积分, 见第 6 章）

12. 证明数列

$$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

有极限.

证　根据单调有界原理，只要证明它是单调减小有下界就行了. 事实上，

$$x_{n+1}-x_n=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<0$$

即$x_{n+1}<x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

其次，因为$2\left(\sqrt{k+1}-k\right)=\dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\dfrac{1}{\sqrt{k}}\ (k=1,2,\cdots)$，所以

$$2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)<\frac{1}{\sqrt{1}},\ 2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)<\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cdots,\ 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

把这些同向不等式依次相加，则得不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$$

因此，

$$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}>\left(2\sqrt{n+1}-2\right)-2\sqrt{n}>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2>-2$$

13. 证明：数列

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,3,\cdots)$$

有极限. 此时，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=C$，则

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = C + \varepsilon_n \quad (\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$$

因此，

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n \quad (\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0)$$

其中常数C称为“**欧拉常数**”.

证 我们要证明数列x_n单调减小且$x_n > 0(n=1,2,\cdots)$. 事实上，

$$x_n - x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1)\right)$$

$$= \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0 \text{（见第 1−6 节）}$$

即$x_n > x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$. 另一方面，根据

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{k=n} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\ln(k+1) - \ln k\right] = \ln(n+1) > \ln n$$

$$[\frac{1}{k} \geq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \text{见第 1−6 节}]$$

则有$x_n > 0(n=1,2,\cdots)$. 根据单调有界原理，必有极限$\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

14. 证明：$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin(2\pi \mathrm{e} n!)\right] = 2\pi$.

证 因为$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}$ $(0 < \theta_n < 1)$，所以

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)} \quad (0 < \theta_{n+1} < 1)$$

因此，

$$n!\mathrm{e} = n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right]$$

上式右端第一项是正整数，而第二项$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}$满足$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,\ \lim_{n\to\infty}(nR_n) = 1$. 注意到$\sin x$是以$2\pi$为周期的周期函数，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin(2\pi \mathrm{e} n!)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\sin(2\pi R_n)\right] = 2\pi \lim_{n\to\infty}\left[nR_n \frac{\sin 2\pi R_n}{2\pi R_n}\right] = 2\pi$$

［注意，$\lim_{n\to\infty}(nR_n) = 1$，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$］