一证明数列

$$x_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$$

有极限

证明:(一) 因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$>\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}=0$$

故$\{x_n\}$单减.

(二) 由不等式

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}},$$

得 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ $\qquad (n=1,\ 2,\cdots)$

所以有

$$x_n>2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+2\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\cdots+2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2\sqrt{n}$$

$$=2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-2>0-2=-2.$$

故$\{x_n\}$有下界.因此根据单调有界原理知,$\{x_n\}$有极限.

二.设常数$a>0$, $x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n个}$,证明: $\{x_n\}$收敛,且求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解:(一)假设$\{x_n\}$收敛,并记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.由已知得递推关系式:

$x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$,令$n\to\infty$,利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=A$,得

$A=\sqrt{a+A}$,即$A^2-A+a=0$,解方程得 $\qquad A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

又因为$x_n>0$,故取$A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

(二)下面返证$\{x_n\}$收敛.

1.由$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots$, 显然$x_2>x_1\left(\because a>0\right)$.归纳地设$x_n>x_{n-1}$,则

$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n$,即$\{x_n\}$单增.

2.再证$\{x_n\}$有上界B.那么如何取B呢?

既然$\{x_n\}$单增且有极限$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,那么$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$就应是$\{x_n\}$的一个上界.下面仍然用归纳法证明$A=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$是$\{x_n\}$的上界.

事实上显然$x_1=\sqrt{a}<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;设$x_n<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$,则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_{n-1}}<\sqrt{a+\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}}=\sqrt{\frac{2a+1+\sqrt{1+4a}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{4a+2+2\sqrt{1+4a}}{4}}<\sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{1+4a}\right)^2}{4}}=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

故$\{x_n\}$单增且有上界,因此$\{x_n\}$收敛.

注意:这里$\{x_n\}$上界的找法似乎依赖于$\{x_n\}$的极限值.为了使上述解法更符合逻辑,一般教科书往往先证(2),再求(1)的方法,不过(2)中的上界的选取实际上是事先计算出的极限.当然若$\{x_n\}$为单减的,则事先计算出的极限值就是数列的一个下界了.

注意:同理可将上例推广到一般情形:

设$x_1=a>0,\ x_n=\sqrt{b+x_{n-1}},\left(b>0\right),n=2,3,\cdots$,则数列$\{x_n\}$收敛且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}.$$

其中

(1)当$x_1=x_2$,即$a=\sqrt{b+a}$或$a=\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$时,$x_n\equiv\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$.

(2)当$x_1<x_2$,即$a=\sqrt{b+a}$或$a<\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$时, $\{x_n\}$单增,且

$\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$.为上界;

(3)当 $x_1 > x_2$,即 $a=\sqrt{b+a}$ 或 $a>\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$ 时, $\{x_n\}$ 单减,且以 0 或

$\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$.为下界;

有趣的是数列 $x_n=\sqrt{b+x_{n-1}}$ 的极限与其初值 $x_1=a>0$ 并无关系.这说明在一个收敛的迭代数列中,不管数列的初值 x_1 如何选取,数列总收敛到相同的极限值,这也正是迭代算法的存在价值.

三.设 $b>a>0$,数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 由下式所确定:

$$x_1=a, y_1=b, x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

证明它们有公共的极限.

证明:(一)由 $b>a>0$ 可知, $x_n>0, y_n>0.(n=1,2,\cdots)$

因而 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\geq\sqrt{x_n y_n}=x_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$

显然对于 $\forall n,\ \ y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\geq\sqrt{x_n y_n}=x_{n+1}$, 又因为 $y_1>x_1>0$, 故

对于 $\forall n,\ \ y_n>x_n$.所以 $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}\geq\sqrt{x_n.x_n}=x_n$ (1)

因此, $\{x_n\}$ 单调递增.

同理:因为 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}\leq\dfrac{y_n+y_n}{2}=y_n$, (2)

因此 $\{y_n\}$ 单调递减.

(二)由于 $a=x_1\leq x_n\leq y_n\leq y_1=b$, 因此 $\{x_n\}$ 有上界 b ,且 $\{y_n\}$ 有下界 a ,根据单调有界原理知, 数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 均有极限.

(三).设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=d$.对 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 两边取极限,得

$$d=\frac{c+d}{2},\text{于是,}c=d,\text{即}\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n.$$

四.设 $x_0=a$ 和 $x_1=b$ 已知实数,令

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\quad (n=1,2,\cdots) \tag{1}$$

证明数列$\{x_n\}$收敛且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}$.

证明:由(1)式,

$$x_2-x_1=\frac{x_0+x_1}{2}-x_1=\frac{x_0-x_1}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(x_1-x_0)=\left(-\frac{1}{2}\right)(b-a); \tag{2}$$

$$x_3-x_2=\frac{x_1+x_2}{2}-x_2=\frac{x_1-x_2}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(b-a); \tag{3}$$

$$x_4-x_3=\frac{x_2+x_3}{2}-x_3=\frac{x_2-x_3}{2}=\left(-\frac{1}{2}\right)(x_3-x_2)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3(b-a); \tag{4}$$

$$\vdots$$

$$x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a). \tag{n}$$

上述(2)—(n)相加,得:

$$x_n-x_1=(b-a)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$=(b-a)\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

故$x_n=x_1-\frac{1}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=b-\frac{1}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=b-\frac{1}{3}(b-a)=\frac{a+2b}{3}.$$

五. 设 $x_1=c>0,x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}\quad (n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

证明:(一) 显然$0<x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}<\frac{3(1+x_n)}{3+3x_n}=3,\quad (n=1,2,\cdots)$

(二)由对于任何的$n\geq 2$,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}=\frac{6(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})} \tag{1}$$

(1)式说明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号.

如果 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 均大于 0,则说明 $\{x_n\}$ 是单调增加的,且有上界 3; 如果 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 均小于 0,则说明 $\{x_n\}$ 是单调减少的,且有下界 0.总之,根据单调有界原理知, $\{x_n\}$ 收敛.

(三) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限,得

$$a=\frac{3(1+a)}{3+a}\text{,解之,有 } a=\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}.$$

六.设实数 $c\ge 0, x_1=\dfrac{c}{2}, x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}\quad (n=1,2,\cdots)$,讨论数列 $\{x_n\}$ 敛、散性.

证明: (一)假设 $\{x_n\}$ 收敛,并设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则由 $x_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}$ 两边取极限,得 $a=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a^2}{2}$,即 $a^2-2a+c=0$,解得 $a=1\pm\sqrt{1-c}$.

因此,当 $c>1$ 时, $\{x_n\}$ 发散;

(二)当 $0\le c\le 1$ 时,我们证明 $\{x_n\}$ 是收敛的.

事实上,

(1)显然 $0\le x_n\ (n=1,2,\cdots)$,且 $x_1=\dfrac{c}{2}\le 1$; 下面利用归纳法证明对于任何的 $n\ge 2$,有 $x_n\le c$.

事实上,若假设 $x_k\le 1$, 则有 $x_{k+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_k^2}{2}\le\dfrac{1}{2}=1.$ 故对于任何的 $n\ge 2$,有 $x_n\le 1$.总之, 对于任何的 $n\ge 1$,有 $0\le x_n\le 1$.

(2)因为 $x_{n+1}-x_n=\left[\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}\right]-\left[\dfrac{c}{2}+\dfrac{x_{n-1}^2}{2}\right]=\dfrac{(x_n-x_{n-1})(x_n+x_{n-1})}{2}$

式说明 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号.

如果 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 均大于 0,则说明 $\{x_n\}$ 是单调增加的,且有上

界 1; 如果 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 均小于 0,则说明 $\{x_n\}$ 是单调减少的,且有下界 0.总之,根据单调有界原理知, $\{x_n\}$ 收敛.且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1-\sqrt{1-c}$.

七. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}$

解:(一) 因为 $(2n-1).(2n+1)=4n^2-1<4n^2=(2n)^2$ (1)

故 $1.3^2.5^2.7^2\cdots(2n-1)^2.(2n+1)$

$$=(1.3).(3.5)(5.7)(7.9)\cdots\left[(2n-2)(2n-1)\right]\left[(2n-1)(2n+1)\right](\because(1))$$

$$<2^2.4^2.6^2.\cdots(2n)^2 \qquad (2)$$

所以 $\left[\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^2=\dfrac{1.3^2.5^2.7^2\cdots(2n-1)^2.(2n+1)}{2^2.4^2.6^2\cdots(2n)^2}.\dfrac{1}{2n+1}$ $(\because(2)$

$$<\frac{1}{2n+1} \qquad (3)$$

故 $\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (4)

(二)由(4)式

$0<\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$, 故由夹逼准则知,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}=$

(4)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}}$

解:取 $x_n=\dfrac{2n-1}{n}(n=1,2,\cdots)$,根据课堂上讲过例 26(注意到此题是用夹逼准则证明的):设 $\{x_n\}$ 是实数序列, $x_n>0(\forall n)$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=1.$$

另解:记 $x_n=\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}, n=1,2,\cdots$

则 $x_n=\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\cdots\frac{2n-1}{2n-2}.\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}\Rightarrow\sqrt[n]{x_n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}$; (5)

又 由(3), $x_n^2=\left[\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\right]^2<\frac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow x_n^2<\frac{1}{2n+1}\Rightarrow\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} \qquad (6)$$

综合(5) 、(6), 得 $\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\leq\sqrt[n]{x_n}<\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}=1$, 所以,由夹逼准则知,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}}=1.$

注: 上述另解中用到了结论，其证明方法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 如下.

证明: 记 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$, 则 $x_n\geq 1$, 我们有

$$n=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2}x_n^{\,2}+\cdots\geq\frac{n(n-1)}{2}x_n^{\,2}.$$

由此,得 $0\leq x_n\leq\frac{n(n-1)}{2}x_n^{\,2}$ $(n=2,3,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0.$

因此由夹逼准则知, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

八. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,则也有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

证明:因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,故对于任给的 $M>0$,存在 N,使当 $n>N$ 时,有

$$x_n>M \qquad (1)$$

令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ (2)

则 $\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}.\left(1-\frac{N}{n}\right)$

$$>\frac{s_N}{n}+3M.\left(1-\frac{N}{n}\right) \qquad (3)$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0,1-\frac{N}{n}\to 1>\frac{1}{2}(n\to\infty)$,故可取正整数$N'>N$,使当$n>N'$时,恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2}\Rightarrow\frac{s_N}{n}>-\frac{M}{2},1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}$$

(4)

于是,当$n>N'$时,恒有$\frac{s_n}{n}>\frac{s_N}{n}+3M.\left(1-\frac{N}{n}\right)>-\frac{M}{2}+3M.\frac{1}{2}=M.$

即证明了，对于任给的$M>0$,存在正整数$N'>N$,使当$n>N'$时,恒有

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}>M$.所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$

九． (第 292 页第 3 题). 设：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b,$ 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$$

证明:记$z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n},n=1,2,\cdots$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b,$ 故我们有

$$x_n=a+\alpha_n,y_n=b+\beta_n,\text{这里}\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\text{为无穷小序列.}$$

于是,

$$z_n=ab+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}b+\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}a+\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}.$$

无穷小序列也是有界序列,可设

$$|\beta_n|\le M \qquad \text{对}\ \forall n.$$

因为 $\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\le\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}.M$

所以$\left\{\frac{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_n|}{n}.M\right\}$无穷小序列.

又因为$\left\{\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}b\right\},\left\{\frac{\beta_1+\cdots+\beta_n}{n}a\right\}$也都是无穷小序列,所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$$

十. 证明著名的施笃兹(Stolz)定理:

若数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足条件:

(1) $y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n < \cdots$, 且 $\lim_{n\to\infty} y = +\infty.(n\to+\infty)\ \to +\infty(n\to\infty)$;

(2)有极限$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$;

则也有极限$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$, 且$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

证明: 假定$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$,由此,并注意到$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$,知

对于任给的$\varepsilon > 0$,存在N,使当$n > N$时,有

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (且\ y_n > 0) \tag{1}$$

于是,当$n > N$时

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \cdots, \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{y_{n-2} - y_{n-1}}, \frac{x_{n-1} - x_n}{y_{n-1} - y_n} \tag{2}$$

都包括在$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$之内,因为$y_n > y_{n+1}$,所以(2)式中那些分数的分母都是正数,于是得

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+1} - y_N) < x_{N+1} - x_N < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+1} - y_N);$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+2} - y_{N+1});$$

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{N+3} - y_{N+2});$$

……………

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1}).$$

上述各式相加,得

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_N) < x_n - x_N < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_N).$$

即 $a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}<a+\frac{\varepsilon}{2}$.故当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

另外,我们有,当 $n>N$ 时

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_N-ay_N}{y_n}+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\cdot\left(\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right) \tag{3}$$

故 $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|+\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)\cdot\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|$,注意到

$1-\frac{y_N}{y_n}<1,\left|\frac{x_n-x_N}{y_n-y_N}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.故有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

又注意到,对于上述的 N ,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$,所以,有

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_N-ay_N}{y_n}=0$, 故可取 $N'(>N)$,使得当 $n>N'$ 有

$$\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|=\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}-0\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

于是,当 $n>N'$ 时,有

$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_N-ay_N}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.因此,依极限定义,知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$$

十一求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\sin\left(2\pi en!\right)\right]$

解:由(见课本 $P286-287$ 的推导)

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\quad(0<\theta_{n+1}<1) \tag{1}$$

故 $2\pi en!=2\pi n!\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)!(n+1)}\right]$

注意到 $\sin 2k\pi=0,k=1,2,\cdots$

故 $\sin(2\pi en!) = \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(2\pi en!\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\right)=2\pi.$$

十二设 $y_n>0\left(n=1,2,\cdots\right)$ 且 $y_1+\cdots+y_n=s_n\to\infty\left(n\to\infty\right)$.证明:

若有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,则也有极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证明:设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$,则 $x_n=c+\alpha_n$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0.\left(n=1,2,\cdots\right)$

于是

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=c+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ky_k}{s_n}. \qquad (1)$$

记 $\beta_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_ky_k}{s_n}$,为方便起见,

又记 $\frac{y_k}{s_n}=t_{nk}\quad\left(k=1,2,\cdots,n\right)$, 则

$$\beta_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_kt_{nk} \qquad (2)$$

显然有对于任意给定的 $k\left(1\le k\le n\right)$,$\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$;且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1,\forall n.$ (3)

下面证明 $\beta_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_kt_{nk}$ 为无穷小序列.

事实上,对于 $\forall\varepsilon>0,\exists m\in N$，使得，只要 $k>m$,就有 $|\alpha_k|<\varepsilon/2$ (4)

又因为对于任何给定的 $k,\left(1\le k\le m\right)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0.$,所以对这取定的 m,存在

$P_k\in N$,使当 $n>P_k$ 时,就有 $t_{nk}<\frac{\varepsilon}{2\left(|\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_m|\right)},k=1,2,\cdots,m.$

,又可取 $p=\max\left\{P_1,\cdots,P_m\right\}$,则当 $n>p$ 时，有

$$t_{n1}\left|\alpha_1\right|+\cdots t_{nm}\left|\alpha_m\right|<\varepsilon/2. \tag{5}$$

我们记 $N=\max\{m,p\}$.于是，当 $n>N$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\beta_n\right| &\le t_{n1}\left|\alpha_1\right|+\cdots+t_{nm}\left|\alpha_m\right|+t_{n(m+1)}\left|\alpha_{m+1}\right|+\cdots+t_{nn}\left|\alpha_n\right| \\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\left(t_{n(m+1)}+\cdots+t_{nn}\right)\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\beta_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k t_{nk}$ 为无穷小序列.,

所以，$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n}{y_1+y_2+\cdots+y_n}=c=\lim_{n\to\infty}x_n.$