极限的求法与技巧

函数极限的计算是数学分析的基础，那么如何根据表达式求出极限值呢?对于这一问题只能针对小同体型采取相应的求法。下面概括了常用的若干求极限的方法，更多方法，有赖于人们去总结和发现。

1.运用极限的定义

例：用极限定义证明: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=1$

证：由 $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|=\left|\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}\right|$

$$=\left|\frac{(x-2)^2}{x-2}\right|=|x-2|$$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\varepsilon$ 则当 $0<|x-2|<\delta$ 时, 就有

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{x-2}-1\right|<\varepsilon$$

由函数极限 $\varepsilon-\delta$ 定义有:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=1$$

2. 利用等价无穷小替换

常用的等价无穷小关系：

$x\to 0,$

$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x,$

$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x,\quad e^x-1\sim x,\quad \log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a},\quad a^x-1\sim x\ln a,$

$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x,\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\quad \ln(1+x)\sim x,$

等价无穷小代换法

设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 都是同一极限过程中的无穷小量，且有：

$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$， $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，

则 $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且有 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}$

例:求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

解: $\sin x^2 \sim x^2$， $1-\cos x^2 \sim \frac{(x^2)^2}{2}$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{\frac{(x^2)^2}{2}}{x^2 x^2} = \frac{1}{2}$$

注： 在利用等价无穷小做代换时，一般只在以乘积形式出现时可以互换，若以和、差出现时，不要轻易代换，因为此时经过代换后，往往改变了它的无穷小量之比的“阶数”

3．利用极限的四则运算法则

极限的四则运算法则叙述如下：

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

(I) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

(II) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

(III)若 B≠0 则：

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$$

（IV） $\lim\limits_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = cA$ （c 为常数）

上述性质对于 $x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$ 时也同样成立

总的说来，就是函数的和、差、积、商的极限等于函数极限的和、差、积、商。

例：求 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+3x+5}{x+4}$

解： $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+3x+5}{x+4} = \frac{2^2+3\cdot 2+5}{2+4} = \frac{5}{2}$

4、利用两个重要的极限。

$(A)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\qquad$ $(B)\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$

但我们经常使用的是它们的变形：

$(A^{'})\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,(\varphi(x)\to 0)$

$(B^{'})\lim(1+\dfrac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=e,(\varphi(x)\to\infty)$

例：求下列函数极限

$(1)、\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}$ $\qquad$ $(2)、\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$

解：（1）令$a^{x}-1=u,$则 $x=\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$ 于是$\dfrac{a^{x}-1}{x}=\dfrac{u\ln a}{\ln(1+u)}$

又当$x\to 0$时，$u\to 0$

故有:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u\ln a}{\ln(1+u)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln a}{\dfrac{\ln(1+u)}{u}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln a}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\ln a$

(2)、原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[(1+(\cos ax-1)]}{\ln[1+(\cos bx-1)]}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln[(1+(\cos ax-1)]}{\cos ax-1}}{\dfrac{\ln[1+(\cos bx-1)]}{\cos bx-1}}\cdot\frac{\cos bx-1}{\cos ax-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos bx-1}{\cos ax-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^{2}\dfrac{\alpha}{2}x}{-2\sin^{2}\dfrac{b}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^{2}\frac{a}{2}x}{(\frac{a}{2}x)^{2}}}{\dfrac{\sin^{2}\frac{b}{2}x}{(\frac{b}{2}x)^{2}}}\cdot\frac{(\frac{b}{2}x)^{2}}{(\frac{a}{2}x)^{2}}=\frac{b^{2}}{a^{2}}$$

例：求下列函数的极限

（1） $\lim\limits_{n\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^{2}}\cos\dfrac{x}{2^{3}}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^{n}}\right]\right\}$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{n^2}{m^2})^m$

解：(1) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$

$$=\frac{1}{2\ \sin\frac{x}{2^n}}\sin x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x$$

$$=\frac{\sin x}{\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(2) $$\lim_{m\to\infty}(1-\frac{n^2}{m^2})^m=\lim_{m\to\infty}(1-\frac{n^2}{m^2})^{-\frac{m^2}{n^2}\cdot(-\frac{n^2}{m^2})\cdot m}=\lim_{m\to\infty}(1-\frac{n^2}{m^2})^{-\frac{m^2}{n^2}\cdot(-\frac{n^2}{m})}=e^0=1$$

5、利用无穷小量与无穷大量的关系。

（I）若：$\lim f(x)=\infty$　　则　$\lim\frac{1}{f(x)}=0$

（II）若：　$\lim f(x)=0$　　且　f(x)≠0　则　$\lim\frac{1}{f(x)}=\infty$

例：求下列极限

① $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+5}$　　　② $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

解：由　$\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)=\infty$　　故　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x+5}=0$

由　$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$　　故　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$

6. 变量替换

例　求极限　$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n-1}{4^n-1}$.

分析　当 $n\to+\infty$ 时, 分子、分母都趋于 $+\infty$, 不能直接应用法则, 注意到 $4^n=(2^2)^n=(2^n)^2$, 故可作变量替换.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n-1}{(2^n)^2-1}$

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t-1}{t^2-1}$　　（令 $t=2^n$, 引进新的变量, 将原来的关于 n 的极限转化为 t 的极限.）

$=0$.　　（$\frac{\infty}{\infty}$型, 最高次幂在分母上）

例：求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$

解：令 $t=x^x-1$ 则 $\ln x=\ln(t+1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}=1$$

7. 分段函数的极限

例　设 $f(x)=\begin{cases}x-1, x<0\\ 0, x=0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的极限是否存在.

分析　所给函数是分段函数，$x=0$是分段点，要知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在，必须从极限存在的充要条件入手.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

注 1　因为 x从 0的左边趋于 0，则 $x<0$，故 $f(x)=x-1$.

注 2　因为 x从 0的右边趋于 0，则 $x>0$，故 $f(x)=x+1$.

8、利用函数的连续性（适用于求函数在连续点处的极限）。

(i)若$f(x)$在$x=x_0$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

(ii)若$f[\varphi(x)]$是复合函数，又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$且

$f(u)$在$u=a$处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(a)$

例：求下列函数的极限

(1)、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$　　　　（2）　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

解：由于$x=0$属于初等函数$f(x)=\dfrac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}$的定义域之内。

故由函数的连续性定义有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x+5}{1+x^2+\ln(1-x)}=f(0)=6$$

(2)、由$\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

令$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$故有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1$$

9、洛必达法则（适用于未定式极限）

定理：若

$(i) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

(ii) f与g在x_0的某空心邻域$u^0(x_0)$内可导，且$g^{'}(x) \neq 0$

$(iii) \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$($A$可为实数，也可为$\pm\infty$或$\infty$），则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = A$$

此定理是对$\dfrac{0}{0}$型而言，对于函数极限的其它类型，均有类似的法则。

注：运用洛必达法则求极限应注意以下几点：

1、要注意条件，也就是说，在没有化为$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$时不可求导。

2、应用洛必达法则，要分别的求分子、分母的导数，而不是求整个分式的导数。

3、要及时化简极限符号后面的分式，在化简以后检查是否仍是未定式，若遇到不是未定式，应立即停止使用洛必达法则，否则会引起错误。

4、当$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ 不存在时，本法则失效，但并不是说极限不存在，此时求极限须用另外方法。

例： 求下列函数的极限

①$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x^2)}$ ② $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} (a > 0, x > 0)$

解：①令 f(x)= $e^x - (1+2x)^{1/2}$， g(x)= $\ln(1+x^2)$

$$f^{'}(x) = e^x - (1+2x)^{-1/2}, \quad g^{'}(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f^{''}(x) = e^x + (1+2x)^{-3/2}, g^{''}(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

由于 $f(0) = f^{'}(0) = 0, g(0) = g^{'}(0) = 0$

但 $f^{''}(0) = 2, g^{''}(0) = 2$

从而运用洛必达法则两次后得到

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+2x)^{1/2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (1+2x)^{-1/2}}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + (1+2x)^{-3/2}}{\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

② 由 $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = \infty, \lim\limits_{x \to +\infty} x^a = \infty$ 故此例属于$\dfrac{\infty}{\infty}$型，由洛必达法则有：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0(a>0,x>0)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\cos x^2+\frac{\sin x^2}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

注:此法采用洛必达法则配合使用两个重要极限法。

[解法二]:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x^2}{x^2}}\cdot\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{2\cdot\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}$$

注：此解法利用“三角和差化积法”配合使用两个重要极限法。

[解法三]:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\cdot x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^2}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{4x}\cdot\frac{\sin x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

注:此解法利用了两个重要极限法配合使用无穷小代换法以及洛必达法则

[解法四]:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(x^2)^2}{2}}{x^4}\cdot\frac{x^2}{\sin x^2}=\frac{1}{2}$$

注:此解法利用了无穷小代换法配合使用两个重要极限的方法。

[解法五]:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(\frac{x^2}{2})^2}{x^2(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}=\frac{1}{2}$$

注:此解法利用“三角和差化积法”配合使用无穷小代换法。

[解法六]：

令$u=x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u\sin u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\sin u+u\cos u}$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u}{\cos u+\cos u-u\sin u}=\frac{1}{2}$$

注：此解法利用变量代换法配合使用洛必达法则。

[解法七]:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2\cos x^2+\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{x^2}{tgx^2}}=\frac{1}{2}$$

注:此解法利用了洛必达法则配合使用两个重要极限。

例：（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}$

(2)求 $\lim\limits_{x\to 0_+}x^x$

解：（1） 由 $\lim\limits_{x\to 0}\ln\sin mx=\lim\limits_{x\to 0}\ln\sin nx=-\infty$

所以上述极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin mx}{\ln\sin nx}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\cdot\frac{\cos mx\cdot\sin nx}{\cos nx\cdot\sin mx}=\frac{m}{n}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx}=1$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0_+}x^x$ 它为 0^0 型

由对数恒等式可得 $x^x=e^{x\ln x}$

$$\lim_{x\to 0_+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0_+}x\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0_+}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0_+}x^x=e^0=1$$

10、 利用函数极限的存在性定理（夹逼准则）

定理: 设在 x_0 的某空心邻域内恒有 g(x)≤f(x)≤h(x) 且有:

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A$$

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

例： 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$ (a>1, n>0)

解： 当 x≥1 时，存在唯一的正整数 k，使

k ≤x≤k+1

于是当 n>0 时有：

$$\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及 $$\frac{x^n}{a^x}>\frac{k^n}{a^{k+1}}=\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}$$

又∵ 当 $x\to+\infty$ 时，$k\to+\infty$ 有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^{k+1}}\cdot a=0\cdot a=0$$

及 $$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^n}{a^{k+1}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}=0\cdot\frac{1}{a}=0$$

∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=0$

例： $$x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots\ldots\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

求 x_n 的极限

解：因为 x_n 单调递减，所以存在最大项和最小项

$$x_n\ge\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$x_n\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

则 $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

又因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=1$

11、用左右极限与极限关系(适用于分段函数求分段点处的极限，以及用定义求极限等情形)。

定理：函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且等于 A 的充分必要条件是左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$及右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在且都等于 A。即有：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$=A

例：设 $f(x)=\begin{cases}1-2e^{-x},x\le 0\\ \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},0<x<1\\ x^2,x\ge 1\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$及$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

解：$\because\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-2e^{-x})=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}})=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}-1)=-1$

由$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-1$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$

又$\because\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}(\sqrt{x}-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}x^2=1$

由$f(1-0)\ne f(1+0)$

$\therefore\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在

12、约去零因式（此法适用于$x\to x_0$时,$\frac{0}{0}$型）

例： 求$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-16x-20}{x^3+7x^2+16x+12}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^3-3x^2-10x\right)+(2x^2-6x-20)}{\left(x^3+5x^2+6x\right)+(2x^2+10x+12)}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-3x-10)}{(x+2)(x^2+5x+6)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-3x-10)}{(x^2+5x+6)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-5}{x+3}=-7$$

13、通分法（适用于$\infty-\infty$型）

例： 求 $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{4}{4-x^2}-\dfrac{1}{2-x})$

解： 原式$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-(2+x)}{(2+x)\cdot(2-x)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)}{(2+x)(2-x)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{4}$$

14、利用泰勒公式

对于求某些不定式的极限来说，应用泰勒公式比使用洛必达法则更为方便，下列为常用的展开式：

1、$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2、$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

3、$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

4、$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$

5、$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

6、$\dfrac{1}{1-x}=1+\mathrm{x}+\mathrm{x}^2+\cdots\cdots+x^n+o(x^n)$

上述展开式中的符号$o(x^n)$都有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$$

例:求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}(a>0)$

解:利用泰勒公式，当 $x\to 0$ 有

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+o(x)$$

于是 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{a+x}}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}(\sqrt{1+\frac{2x}{a}}-\sqrt{1+\frac{x}{a}})}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}\left[1+\frac{1}{2}(\frac{2x}{a})+o(x)-1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a}-o(x)\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a}\cdot\frac{x}{2a}+o(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}x+o(x)}{x}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

例： $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

解：泰勒展开式 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+0(x^4)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+0(x^4)$$

于是 $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{12}x^4+0(x^4)$

所以 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+0(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$

15、利用中值定理

微分中值定理:若函数 f 满足如下条件：

(I) f 在闭区间上连续

(II) f 在(a , b)内可导

则在(a , b)内至少存在一点ξ，使得

$$f^{'}(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

此式变形可为:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(a+\theta(b-a)) \qquad (0<\theta<1)$$

例: 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解:令 $f(x)=e^{x}$ 对它应用中值定理得

$e^{x}-e^{\sin x}=f(x)-f(\sin x)=(x-\sin x)f^{'}(\sin x+\theta(x-\sin x))\,(0<\theta<1)$ 即 :

$$\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=f^{'}(\sin x+\theta(x-\sin x)) \qquad (0<\theta<1)$$

$\because f^{'}(x)=e^{x}$连续

$$\therefore \lim_{x\to 0}f^{'}(\sin x+\theta(x-\sin x))=f^{'}(0)=1$$

从而有: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1$

例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^{3}}$

解: $\sin(\sin x)-\sin x=(\sin x-x)\cdot\cos\left[\theta\cdot(x-\sin x)+x\right] \qquad \left(0<\theta<1\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-\sin x}{x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)\cdot\cos\left[\theta\cdot(x-\sin x)+x\right]}{x^{3}}$$

$$=\cos 0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}$$

$=-\dfrac{1}{6}$

积分中值定理：设函数 f(x) 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续；g(x) 在 $\left[a,b\right]$ 上不变号且可积，则在 $\left[a,b\right]$ 上至少有一点 ξ 使得 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)=f(\xi)\cdot\int_a^b g(x)dx$ $\left(a\le\xi\le b\right)$

例：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xdx$

解： $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n xdx$

$=\lim\limits_{n\to\infty}six^n\cdot\xi\cdot(\dfrac{\pi}{4}-0)$ $\qquad\left(0\le\xi\le\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\dfrac{\pi}{4}\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\xi)^n$

$=0$

16、求代数函数的极限方法

(1)有理式的情况，即若：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}\qquad(\mathrm{a}_0\ne0,b_0\ne0)$$

(I)当 $x\to\infty$时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & \mathrm{m<n}\\ \infty & \mathrm{m>n}\end{cases}$$

(II)当 $x\to0$ 时有：

①若 $Q(x_0)\ne0$ 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$

②若 $Q(x_0)=0$ 而 $P(x_0)\ne0$ 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\infty$

③若 $Q(x_0)=0$ ，$P(x_0)=0$，则分别考虑若 x_0 为 $P(x)=0$ 的 s 重根，即: $P(x)=(x-x_0)^s P_1(x)$ 也为 $Q(x)=0$ 的 r 重根, 即:

$Q(x)=(x-x_0)^r Q_1(x)$ 可得结论如下：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^{s-r}P_1(x)}{Q_1(x)}=\begin{cases}0 \quad , \quad s>r \\ \dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)} \quad ,s=r \\ \infty \qquad ,s<r\end{cases}$$

例：求下列函数的极限

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ 　　　　② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

解: ①分子，分母的最高次方相同，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=\frac{2^{20}\cdot 3^{30}}{2^{50}}=(\frac{3}{2})^{30}$$

②$\because P(x)=x^3-3x+2, \therefore P(1)=0$

$\because Q(x)=x^4-4x+3, \therefore Q(1)=0$

$\therefore P(x),Q(x)$ 必含有（x-1）之因子，即有 1 的重根 故有:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}$$

(2)无理式的情况。虽然无理式情况不同于有理式，但求极限方法完全类同，这里就不再一一详述. 在这里我主要举例说明有理化的方法求极限。

例：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+1}=\frac{1}{2}$$

17. 利用拆项法技巧

例6：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)})$

分析：由于 $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)})=\frac{1}{2}(\frac{1}{(2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

原式=$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2}$

18. 利用单调有界准则：单调有界数列必有极限，而且极限唯一。

利用单调有界准则求极限，关键先要证明数列的存在，然后根据数列的通项递推公式求极限。

例：证明下列数列的极限存在，并求极限。

$$y_1=\sqrt{a},y_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},y_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots\cdots,y_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$$

证明：从这个数列构造来看 y_n 显然是单调增加的。用归纳法可证。

又因为 $y_2=\sqrt{a+y_1},y_3=\sqrt{a+y_2},\cdots\cdots,y_n=\sqrt{a+y_{n-1}}$

所以得 ${y_n}^2=a+y_{n-1}$. 因为前面证明 y_n 是单调增加的。

两端除以 y_n 得 $y_n<\frac{a}{y_n}+1$

因为$y_n \ge y_1 = \sqrt{a}$,则$\dfrac{a}{y_n} \le \sqrt{a}$，从而$\dfrac{a}{y_n} + 1 \le \sqrt{a} + 1$

$$\sqrt{a} \le y_n \le \sqrt{a} + 1$$

即 y_n 是有界的。根据定理$\{y_n\}$有极限，而且极限唯一。

令 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} {y_n}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(y_{n-1} + a)$

则$l^2 = l + a$. 因为 $y_n > 0,$ 解方程得$l = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$

19：利用定积分求和式的极限

利用定积分求和式的极限时首先选好恰当的可积函数 f(x)。把所求极限的和式表示成 f(x)在某区间 $[a,b]$上的待定分法(一般是等分)的积分和式的极限。

例：求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$

解：由于$\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1-1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2-1}{n}\right)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

可取函数 f(x)＝$\dfrac{1}{1+x^2}$区间为$[0,1]$上述和式恰好是$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

在 $[0,1]$上 n 等分的积分和。

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots\cdots + \dfrac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1-1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2-1}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

20.利用级数收敛的必要条件求极限

利用级数收敛的必要条件：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$收敛，则$\mu_n\to 0(n\to\infty)$运用这个方法首先判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$收敛，然后求出它的通项的极限

例： 求$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$

解：设$a_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$

则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot(1+\frac{1}{n})^n$

=0<1

由比值判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

由必要条件知$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ ＝0

在实际学习中很多题是多种方法综合运用求解的。所以求极限时，首先观察数列或函数的形式．选择适当方法，只有方法得当，才能准确、快速、灵活的求解极限 。