数列通项公式的九种求法

各种数列问题在很多情形下，就是对数列通项公式的求解。特别是在一些综合性比较强的数列问题中，数列通项公式的求解问题往往是解决数列难题的瓶颈。笔者总结出九种求解数列通项公式的方法，希望能对大家有帮助。

一、定义法

直接利用等差数列或等比数列的定义求通项的方法叫定义法，这种方法适应于已知数列类型的题目.

例 1. 等差数列$\{a_n\}$是递增数列，前 n 项和为S_n，且a_1，a_3，a_9成等比数列，$S_5=a_5^2$.求数列$\{a_n\}$的通项公式

解： 设数列$\{a_n\}$公差为$d(d>0)$

$\because a_1$，a_3，a_9成等比数列，$\therefore a_3^2=a_1a_9$，

即$(a_1+2d)^2=a_1(a_1+8d)$，得$d^2=a_1d$

$\because d\neq 0$，$\therefore a_1=d$……………………①

$\because S_5=a_5^2$

$\therefore 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}\cdot d=(a_1+4d)^2$ …………②

由①②得：$a_1=\dfrac{3}{5}$，$d=\dfrac{3}{5}$

$\therefore a_n=\dfrac{3}{5}+(n-1)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}n$

点评： 利用定义法求数列通项时要注意不用错定义，设法求出首项与公差（公比）后再写出通项。

二、累加法

求形如$a_n-a_{n-1}=f(n)$（f(n)为等差或等比数列或其它可求和的数列）的数列通项，可用累加法，即令 n=2，3，⋯n—1 得到 n—1 个式子累加求得通项。

例 2. 已知数列{a_n}中，$a_1=1$，对任意自然数 n 都有$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$，求$a_n$.

解： 由已知得$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

$a_{n-1}-a_{n-2}=\dfrac{1}{(n-1)n}$，……，

$a_3-a_2=\dfrac{1}{3\times 4}$，$a_2-a_1=\dfrac{1}{2\times 3}$，

以上式子累加，利用$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$得

$a_n-a_1=\dfrac{1}{2\times 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-2)(n-1)}+\dfrac{1}{(n-1)n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}$，$\therefore a_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n+1}$

点评： 累加法是反复利用递推关系得到 n—1 个式子累加求出通项，这种方法最终转化

为求{f(n)}的前 n—1 项的和，要注意求和的技巧.

三、迭代法

求形如 $a_{n+1}=qa_n+d$（其中 q,d 为常数）的数列通项，可反复利用递推关系迭代求出。

例 3. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=3a_n+1$，求 a_n .

解： $a_n=3a_{n-1}+1=3(3a_{n-2}+1)+1=3^2a_{n-2}+3\times1+1=\cdots=3^{n-1}a_1+3^{n-2}\times1+3^{n-3}\times1+\cdots+3\times1+1=\dfrac{3^n-1}{2}$

点评： 因为运用迭代法解题时，一般数据繁多，迭代时要小心计算，应避免计算错误，导致走进死胡同.

四、公式法

若已知数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系，求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 可用公式 $a_n=\begin{cases}S_n\cdots\cdots\cdots\cdots n=1\\ S_n-S_{n-1}\cdots n\ge2\end{cases}$ 求解。

例 4. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_n=2a_n+(-1)^n, n\ge1$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

解： 由 $a_1=S_1=2a_1-1,得a_1=1.$

当 $n\ge2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_n-a_{n-1})+2\times(-1)^n$,

$\therefore a_n=2a_{n-1}+2\times(-1)^{n-1}$,

$a_{n-1}=2a_{n-2}+2\times(-1)^{n-2}$, ……， $a_2=2a_1-2.$

$$\begin{aligned}\therefore a_n&=2^{n-1}a_1+2^{n-1}\times(-1)+2^{n-2}\times(-1)^2+\cdots+2\times(-1)^{n-1}\\&=2^{n-1}+(-1)^n[(-2)^{n-1}+(-2)^{n-2}+\cdots+(-2)]\\&=2^{n-1}-(-1)^n\frac{2[1-(-2)^{n-1}]}{3}\\&=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}].\end{aligned}$$

经验证 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\dfrac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$

点评： 利用公式 $a_n=\begin{cases}S_n\cdots\cdots\cdots\cdots n=1\\ S_n-S_{n-1}\cdots n\ge2\end{cases}$ 求解时，要注意对 n 分类讨论，但若能合写时一定要合并.

五、累乘法

对形如 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 的数列的通项，可用累乘法，即令 n=2，3，…n—1 得到 n—1 个式子累乘求得通项。

例 5. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{3}$，前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系是 $S_n=n(2n-1)a_n$，求通项公式 a_n .

解： 由 $S_n=n(2n-1)a_n$ 得 $S_{n-1}=(n-1)(2n-3)a_{n-1}$

两式相减得：$(2n+1)a_n=(2n-3)a_{n-1}$, ,

$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n-3}{2n+1}$, $\therefore \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{2n-5}{2n-1},\cdots\cdots,\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{5}$

将上面 n—1 个等式相乘得：

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 3\cdot 1}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 7\cdot 5}=\frac{3}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{(2n+1(2n-1)}.$$

点评：累乘法是反复利用递推关系得到 n—1 个式子累乘求出通项，这种方法最终转化为求{f(n)}的前 n—1 项的积，要注意求积的技巧.

六、分 n 奇偶讨论法

在有些数列问题中，有时要对 n 的奇偶性进行分类讨论以方便问题的处理。

例 6．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$ 且 $a_na_{n+1}=2^{(\frac{1}{4})^n}$，求通项公式.

解：由 $a_na_{n+1}=2^{(\frac{1}{4})^n}$ 及 $a_{n+1}a_{n+2}=2^{(\frac{1}{4})^{n+1}}$，两式相除，得 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{4}$，则 $a_1,a_3,a_5,\cdots a_{2n-1},\cdots$ 和 $a_2,a_4,a_6,\cdots a_{2n},\cdots$都是公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列，又 $a_1=1,a_2=\frac{1}{2}$，则：（1）当 n 为奇数时，$a_n=1\cdot(\frac{1}{4})^{\frac{n-1}{2}}=4^{\frac{1-n}{2}}$；（2）当 n 为偶数时，$a_n=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4})^{\frac{n-2}{2}}=4^{\frac{1-n}{2}}$．综合得 $a_n=4^{\frac{1-n}{2}}$

点评：对 n 的奇偶性进行分类讨论的另一种情形是题目中含有$(-1)^n$时，分 n 为奇偶即可自然引出讨论. 分类讨论相当于增加条件,变不定为确定. 注意最后能合写时一定要合并。这是近年高考的新热点，如 05 年高考江西卷文科第 21 题.

七、化归法

想方设法将非常规问题化为我们熟悉的数列问题来求通项公式的方法即为化归法. 同时，这也是我们在解决任何数学问题所必须具备的一种思想。

例 7．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{5},$

且当$n>1,n\in \mathbf{N}^*$时,有$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}.$ 求 a_n

解：当 $n\geq 2$时,由$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2a_{n-1}+1}{1-2a_n}$

得$a_{n-1}-a_n-4a_{n-1}a_n=0$

两边同除以 a_na_{n-1}得,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=4$，

即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=4$对$n>1$且$n\in \mathbf{N}^*$ 成立，

∴ $\{\frac{1}{a_n}\}$是以首项为 5，公差为 4 的等差数列.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=4n+1,所以,a_n=\frac{1}{4n+1}.$$

点评：本题借助 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列得到了$\{a_n\}$的通项公式，是典型的化归法. 常用的化

归还有取对数化归，待定系数化归等，一般化归为等比数列或等差数列的问题，是高考中的常见方法.

八、“归纳—猜想—证明”法

直接求解或变形都比较困难时，先求出数列的前面几项，猜测出通项，然后用数学归纳法证明的方法就是“归纳—猜想—证明”法.

例 8．若数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1, a_{n+1}=2a_n+3\times2^{n-1}$，计算 a_2，a_3，a_4 的值，由此归纳出 a_n 的公式，并证明你的结论.

解：∵a_2=2 a_1+3×2°=2×1+3×2°，

a_3=2（2×1+3×2°）+3×2^1=2^2×1+2×3×2^1，

a_4=2（2^2×1+2×3×2^1）+3×2^2=2^3×1+3×3×2^2；

猜想 a_n=2^{n-1}+（n－1）×3×2^{n-2}=2^{n-2}（3n－1）；

用数学归纳法证明：

1° 当 n=1 时，a_1=2^{-1}×=1，结论正确；

2° 假设 n=k 时，a_k=2^{k-2}（3k－1）正确，

∴当 n=k+1 时，

$a_{k+1}=2a_k+3\times2^{k-1}=2^{k-1}(3k-1)+3\times2^{k-1}$

$=2^{k-1}(3k+2)=2^{(k+1)-1}[3(k+1)-1]$，结论正确；

由 1°、2° 知对 n∈**N***有 $a_n=2^{n-2}(3n-1)$.

点评：利用“归纳—猜想—证明”法时要小心猜测，切莫猜错，否则前功尽弃；用数学归纳法证明时要注意格式完整，一定要使用归纳假设.

九、待定系数法（构造法）

求递推式如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数）的数列通项，可用待定系数法转化为我们熟知的数列求解，相当如换元法。

例 9．已知数列{a_n}满足 a_1=1，且 a_{n+1}=$3a_n$+2，求 a_n .

解：设 $a_{n+1}+t=3(a_n+t)$，则 $a_{n+1}=3a_n+2t$，

$t=1$，$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$ $\therefore\{a_n+1\}$为等比数列，

$a_n+1=(a_1+1)\cdot3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$，$a_n=2\cdot3^{n-1}-1$

点评：求递推式形如 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数）的数列通项，可用迭代法或待定系数法构造新数列 $a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p(a_n+\frac{q}{p-1})$来求得,也可用“归纳—猜想—证明”法来求，这也是近年高考考得很多的一种题型.

例 10．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_n=3^n+2a_{n-1}(n\geq2)$. 求 a_n.

解：将 $a_n=3^n+2a_{n-1}$ 两边同除 3^n，得 $\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2a_{n-1}}{3^n}$，变形为 $\frac{a_n}{3^n}=1+\frac{2}{3}\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}$.

设 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，则 $b_n=1+\frac{2}{3}b_{n-1}$. 令 $b_n-t=\frac{2}{3}(b_{n-1}-t)$, 即 $b_n=\frac{2}{3}b_{n-1}+\frac{1}{3}t$，

得 $t=3$．条件可化成 $b_n-3=\frac{2}{3}(b_{n-1}-3)$，

数列 $\{b_n-3\}$是以 $b_1-3=\frac{a_1}{3}-3=-\frac{8}{3}$ 为首项，$\frac{2}{3}$ 为公差的等比数列.

$b_n-3=-\frac{8}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}$. 因 $b_n=\frac{a_n}{3^n}$，所以 $a_n=b_n3^n=3^n(-\frac{8}{3}\times(\frac{2}{3})^{n-1}+3)$

得 $a_n=3^{n+1}-2^{n+2}$.

点评：递推式为 $a_{n+1}=pa_n+q^{n+1}$（p、q 为常数）时，可同除 q^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{a_n}{q^n}+1$，令 $b_n=\frac{a_n}{q^n}$ 从而化归为 $a_{n+1}=pa_n+q$（p、q 为常数）型.

例 11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n.$ 求 a_n.

解：设 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n).$

展开后，得 $a_{n+2}=(t+s)a_{n+1}-tsa_n$.

由 $s+t=\frac{2}{3},st=-\frac{1}{3}$，解得 $s=1,t=-\frac{1}{3}$，

条件可以化为 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n).$

得数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项，$-\frac{1}{3}$ 为公差的等比数列，$\therefore a_{n+1}-a_n=(-\frac{1}{3})^{n-1}$. 问题转化为利用累加法求数列的通项的问题，解得 $a_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}(-\frac{1}{3})^{n-1}$.

点评：递推式为 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p、q 为常数）时，可以设 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$，其待定常数 s、t 由 $s+t=p,st=-q$ 求出，从而化归为上述已知题型.