目　　　录

0°～360°间的三角函数·典型例题分析

例 1 已知角α的终边经过点 P(3a，-4a)(a＜0，0°≤α≤360°)，求解α的四个三角函数.

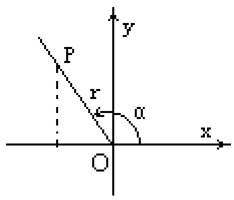

图2-2

解 如图 2-2：∵x=3a，y=-4a，a＜0

$$\therefore r=\sqrt{(3a)^2+(-4a)^2}=-5a$$

$$\therefore \sin\alpha=\frac{\gamma}{r}=\frac{4}{5},\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{3}{5},$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\gamma}{x}=-\frac{4}{3},\ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$$

例 2 求 315°的四个三角函数.

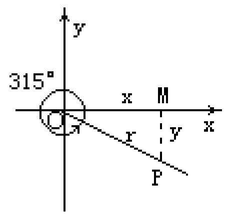

图 2-3

解 如图 2-3，在 315°角的终边上取一点 P(x，y)

设 OP=r，作 PM 垂直于 x 轴，垂足是 M，可见∠POM=45°

于是可得：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}r$，$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}r$，因此，$\sin\alpha=\frac{\gamma}{r}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\gamma}{x}=-1$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-1$

注：对于确定的角α，三角函数值的大小与 P 点在角α的终边上的位置无关，如在 315°的角的终边上取点 Q(1，-1)，计算出的结果是一样的.

弧度制·典型例题分析

例1 (1)将$112^\circ\ 30'$化为弧度；(2)将$\frac{-5\pi}{12}$弧度化为度.

解 (1)$\because 1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度

$\therefore 112^\circ\ 30'=\frac{\pi}{180}\times 112.5$弧度$=\frac{5\pi}{8}$弧度.

(2)$\because 1$弧度$=(\frac{180}{\pi})^\circ$

$\therefore \frac{5\pi}{12}$弧度$=-(\frac{5\pi}{12}\times\frac{180}{\pi})^\circ\ =-75^\circ$

角度与弧度的换算要熟练掌握，见下表.

角度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

角度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

例 2　将下列各角化成$2k\pi+\alpha$ ($k\in Z$，$0\leqslant\alpha<2\pi$)的形式，并确定其所在的象限。(1)$\frac{19\pi}{6}$；(2)$-\frac{31}{6}\pi$.

解 (1)$\because \frac{19\pi}{6}=2\pi+\frac{7}{6\pi}$，

$\therefore \frac{19\pi}{6}$与$\frac{7\pi}{6}$的终边相同。

而$\frac{7\pi}{6}$是第三象限的角，

$\therefore \frac{19\pi}{6}$是第三象限的角.

(2)$\because -\frac{31}{6}\pi = -6\pi + \frac{5\pi}{6}$，$-\frac{31}{6}\pi$与$\frac{5\pi}{6}$的终边相同，

∴它是第二象限的角.

注意：用弧度制表示终边相同角$2k\pi+\alpha$ $(k\in Z)$时，是π的偶数倍，而不是π的整数倍.

例3 已知$\alpha=\frac{5\pi}{8}$，则点P(sinα，tgα)所在的象限是 [ ]

A．第一象限　　B．第二象限

C．第三象限　　D．第四象限

解 $\because \frac{\pi}{2}<\alpha=\frac{5\pi}{8}<\pi$

$\therefore \sin\alpha>0$，$\mathrm{tg}\alpha<0$

因此点P(sinα，tgα)在第四象限，故选D.

例4 集合$M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in Z\}$，

$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$，则有 [ ]

A．$M=N$　　B．$M\supset N$

C．$M\subset N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

解 ∵M集合是表示终边在第一、二、三、四象限的角平分线上的角的集合.

N集合是表示终边在坐标轴(四个位置)上和在第一、二、三、四象限的角平分线上的角的集合.

$\therefore M\subset N$，故选C.

任意角的三角函数·典型例题分析一

例 1　已知角α的终边上一点P(−15α，8α)(α∈R，且α≠0)，求α的各三角函数值.

分析　根据三角函数定义来解

解 $\because x=-15\alpha$，$y=8\alpha$，$\therefore r=\sqrt{(15a)^2+(8a)^2}=17|\alpha|$，($\alpha\neq0$)

①若$\alpha>0$，则$r=17\alpha$，于是$\sin\alpha=\frac{8}{17}$，$\cos\alpha=-\frac{15}{17}$，$tg\alpha=-\frac{8}{15}$，$ctg\alpha=-\frac{15}{8}$，$\sec\alpha=-\frac{17}{15}$，$\csc\alpha=\frac{17}{8}$.

②若$\alpha<0$，则$r=-17\alpha$，于是$\sin\alpha=-\frac{8}{17}$，$\cos\alpha=\frac{15}{17}$，$tg\alpha=-\frac{8}{15}$，$ctg\alpha=-\frac{15}{8}$，$\sec\alpha=\frac{17}{15}$，$\csc\alpha=-\frac{17}{8}$.

例2 当α为第二象限角时，$\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$的值是　　[　　]

A. 1
B. 0

C. 2
D. −2

解 当α为第二象限时，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，故$\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$

$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha}=2$，从而选C.

例 3　若 $\sin 2\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，试确定 α 所在的象限.

分析　用不等式表示出 α，进而求解.

解　∵$\sin 2\alpha>0$，∴2α 在第一或第二象限，即 $2k\pi<2\alpha<2k\pi+\pi$，$k\in Z$)

$\therefore k\pi<\alpha<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$)

当 k 为偶数时，设 $k=2m(m\in Z)$，有

$2m\pi<\alpha<2m\pi+\frac{\pi}{2}(m\in Z)$有

当 k 为奇数时，设 $k=2m+1(m\in Z)$有

$2m\pi+\pi<\alpha<2m\pi+\frac{3\pi}{2}(m\in Z)$

∴ α 为第一或第三象限的角

又由 $\cos\alpha<0$ 可知 α 在第二或第四象限.

综上所述, α 在第三象限.

例4 求下列函数的定义域(1)$y=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$；(2)$y=\sqrt{\sin x}+\mathrm{tg}x$

解 (1)tgx的定义域为$\{x|x\in R且x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\}$，$k\in Z$，ctgx的定义域

义域为$\{x|x\in R$ 且 $x\neq k\pi$，$k\in Z\}$

∴函数 $y=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$ 的定义域是

$$\{x|x\in R且x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\}\cap\{x|x\in R且x\neq k\pi k\in Z\}$$
$$=\{x|x\in R且x\neq\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$$

(2)由$\begin{cases}\sin x\geqslant 0\\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\\ x\neq 2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $(k\in Z)$

$\therefore 2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 且 $x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

$\therefore$定义域为$[2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2})\cup(2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$(2k+1)\pi](k\in Z)$.

说明　本例进一步巩固终边落在坐标轴上角的集合及各三角函数值在每一象限的符号，三角函数的定义域.

例 5　计算

(1)$a^2\sin(-1350°)+b^2tg405°-(a-b)^2ctg765°-2ab\cos(-1080°)$

(2)$\sin(-\frac{11}{6}\pi)+\cos\frac{12}{5}\pi\cdot tg4\pi-\sec\frac{13}{3}\pi$.

分析　利用公式 1，将任意角的三角函数化为 0～2π间(或 0°～360°间)的三角函数，进而求值.

解　(1)原式$=a^2\sin(-4\times360°+90°)+b^2tg(360°+45°)-(a-b)^2ctg(2\times360°+45°)-2ab\cos(-3\times360°)$

$=a^2\sin90°+b^2tg45°-(a-b)^2ctg45°-2ab\cos0°$

$=a^2+b^2-(a-b)^2-2ab$

$=0$

(2)原式$=\sin(-2\pi+\frac{\pi}{6})+\cos\frac{12\pi}{5}\cdot tg0°-\sec(4\pi+\frac{\pi}{3})$

$=\sin\frac{\pi}{6}-\sec\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}-2$

$=-\frac{3}{2}$

任意角的三角函数·典型例题精析二

例 1　下列说法中，正确的是

[　　]

A．第一象限的角是锐角

B．锐角是第一象限的角

C．小于 90°的角是锐角

D．0°到 90°的角是第一象限的角

【分析】本题涉及了几个基本概念，即“第一象限的角”、“锐角”、“小于 90°的角”和“0°到 90°的角”．在角的概念推广以后，这些概念容易混淆．因此，弄清楚这些概念及它们之间的区别，是正确解答本题的关键．

【解】第一象限的角可表示为 $\{\theta|k\cdot 360°<\theta<90°+k\cdot 360°，k\in Z\}$，锐角可表示为 $\{\theta|0°<\theta<90°\}$，小于 90°的角为 $\{\theta|\theta<90°\}$，0°到 90°的角为 $\{\theta|0°\leqslant\theta<90°\}$．因此，锐角的集合是第一象限角的集合当 k=0 时的子集，故(A)，(C)，(D)均不正确，应选(B)．

例2 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，$\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$，那么 $\frac{\alpha}{2}$，2α，

$(90°-\alpha)$分别是第几象限角？

【分析】　由 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$，所以 α 在二、四象限；由 $\sin\alpha\cdot\tan\alpha<0$，所以 α 在二、三象限．因此 α 为第二象限的角，然后由角 α 的

集合正确地写出$\frac{\alpha}{2}$，2α和（90°-α）的集合是解题的关键.

【解】(1)由题设可知α是第二象限的角，即

$$90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°\ (k\in Z),$$

$$45°+k\cdot 180°<\frac{\alpha}{2}<90°+k\cdot 180°\ (k\in Z).$$

当k为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；当k为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角.

所以$\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限的角.

(2)因为 $180°+2k\cdot 360°<2\alpha<360°+2k\cdot 360°\ (k\in Z)$，所以2α是第三、第四象限角或终边在y轴非正半轴上的角.

(3)解法一：因为 $90°+k\cdot 360°<\alpha<180°+k\cdot 360°\ (k\in Z)$，

所以 $-180°-k\cdot 360°<-\alpha<-90°-k\cdot 360°\ (k\in Z)$.

故 $-90°-k\cdot 360°<90°-\alpha<-k\cdot 360°\ (k\in Z)$.

因此90°－α是第四象限的角.

解法二：因为角α的终边在第二象限，所以－α的终边在第三象限.

将－α的终边按逆时针旋转90°，可知90°－α的终边在第四象限内.

【说明】①在确定形如α＋k·180°角的象限时，一般要分k为偶数或奇数讨论；②确定象限时，α＋kπ与α－kπ是等效的.

例3　已知集合E=｛θ|cosθ＜sinθ，0≤θ≤2π｝，F=｛θ|tanθ＜sinθ｝，那么E∩F是区间

[　　]

A. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$　　　B. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

C. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$　　　D. $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

【分析】　解答本题必须熟练掌握各个象限三角函数的符号、各个象限的三角函数值随角的变化而递增或递减的变化情况．可由三角函数的性质判断，也可由三角函数线判断．用代入特殊值排除错误答案的方法解答本题也比较容易．

【解法一】　由正、余弦函数的性质，

$$E=\left\{\theta \left| \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}\right.\right\}.$$

在$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$的范围内，使$\tan\theta<\sin\theta$成立的$\theta$为$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，

所以$E\cap F=\left\{\theta \left| \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right.\right\}$．选（A）．

【解法二】由单位圆中的正弦线和正切线容易看出，对于二、四象限的角，AT＜MP，即 $\tan\alpha<\sin\theta$，由正弦线和余弦线可看出，当

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$时，MP＞OM，即$\sin\theta>\cos\theta$，所以

$$E\cap F=\left\{\theta \left| \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right.\right\}.$$

应选(A)．

【解法三】由$\tan\frac{\pi}{3}>\sin\frac{\pi}{3}$，可排除（B）．由$\tan\frac{7\pi}{6}>\sin\frac{7\pi}{6}$，

可排除(C)，(D)，得(A)．

【说明】本题解法很多，用三角函数线还可以有以下解法：因为第一、三象限均有 AT＞MP，即 $\tan\theta>\sin\theta$，所以(B)，(C)，(D)均不成立．用排除法也有些别的方法，可自己练习．

例 4 (1)已知角 α 终边上一点 P(3k，－4k)(k＜0)，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值；

（2）已知角α的终边上一点P的坐标为（$-\sqrt{3}$，y）（y≠0），

且$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}y$，求点P到原点的距离r和$\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$的值．

【分析】利用三角函数的定义进行三角式的求值、化简和证明，是

一种常用的基本方法．在第（2）小题中因已知$x=-\sqrt{3}$，可判断点P在二、

三两个象限，因此必须分两种情况讨论．

【解】(1)因为 x＝3k，y=－4k，

所以$r=\sqrt{(3k)^2+(-4k)^2}=-5k$（k＜0）．

故 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{-4k}{-5k}=\dfrac{4}{5}$，　　$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{3k}{-5k}=-\dfrac{3}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-4k}{3k}=-\dfrac{4}{3}$．

（2）由于 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}y=\dfrac{y}{r}$，

所以 $r=\dfrac{4y}{\sqrt{2}y}=2\sqrt{2}$（y≠0）．

由$r^2=x^2+y^2$，得$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{5}$．

因为$x=-3\sqrt{3}$，故α在第二或第三象限．

若α在第二象限，则$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$．

$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$，　　$\cot\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$；

若α在第三象限，则$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，　$\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{3}$，$\cot\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$．

例 5　一个扇形的周长为 l，求扇形的半径、圆心角各取何值时，此扇形的面积最大．

【分析】解答本题，需灵活运用弧度制下的求弧长和求面积公式．本题是求扇形面积的最大值，因此应想法写出面积 S 以半径 r 为自变量的函数表达式，再用配方法求出半径 r 和已知周长 l 的关系．

【解】设扇形面积为 S，半径为 r，圆心角为 α，则扇形弧长为 l－2r．所以

$$S=\frac{1}{2}(l-2r)\cdot r=-\left(r-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{l^2}{16}.$$

故当$r=\frac{l}{4}$，且$\alpha=\frac{l-2\cdot\frac{l}{4}}{\frac{l}{4}}=2$时，扇形面积最大．

【说明】在学习弧度制以后，用弧度制表示的求弧长与扇形面积公

式$l=|\alpha|\cdot r$和$S=\frac{1}{2}lr$，比角度制的求弧长、面积公式$l=\frac{n\pi r}{180}$及$S=$

$\frac{n\pi r^2}{360}$更简单，在实际中的应用也较广泛．尤其是在解决有关扇形、弓

形的问题中，中心角用弧度表示较方便．本例实际上推导出一个重要公式，即当扇形周长为定值时，怎样选取中心角可使面积得到最大值．本题也可将面积表示为 α 的函数式，用判别式来解．

例6 根据下列条件求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值：(1) 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$

$\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$；(2) 已知$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$；(3) 已知 $\sin\alpha=m$ ($|m|<1$)．

【分析】第(1)小题因 α 在第二象限，因此只有一组解；第(2)小题给了正弦函数值，但没有确定角 α 的象限，因此有两组解；第(3)小题角 α 可能在四个象限或是轴线角，因此需分两种情况讨论.

【解】

（1）由于$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\cos\alpha<0$，

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$， $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{5}{12}$.

（2）因为$\sin\alpha=-\frac{5}{13}<0$，所以α是第三、四象限的角.

当α在第三象限时，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$，$\tan\alpha=\frac{5}{12}$；

当α在第四象限时，$\cos\alpha=\frac{12}{13}$，$\tan\alpha=-\frac{5}{12}$.

(3)因为 sinα=m(|m|<1)，所以 α 可能在四个象限或 α 的终边在 x 轴上.

当α的终边在一、四象限或x轴的非负半轴上时，$\cos\alpha=\sqrt{1-m^2}$，

$$
\begin{aligned}
15.\ (1)\text{左边}&=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha
\end{aligned}
$$

当α的终边在二、三象限或x轴的非正半轴上时，$\cos\alpha=-\sqrt{1-m^2}$，

$\tan\alpha=-\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$.

例 7(1)已知 tanα=m，求 sinα 的值；

（2）已知 $\tan\alpha=m$，求三角式 $2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha$ 的值.

【分析】(1)已知 $\tan\alpha$ 的值求 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$，一般可将 $\tan\alpha$

写成 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，再和隐含条件 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 联立即可，因需用开方求值，

因此必须考虑角 α 的象限. （2）可将 $2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha$ 化为分子、分

母都是 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的同次式，再转化为关于 $\tan\alpha$ 的式子求值，转化的方法是将分子、分母同除以 $\cos\alpha$ (或 $\cos2\alpha$，这里 $\cos\alpha\neq0$)，即可根据已知条件求值.

【解】（1）由 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=m,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

消去 $\cos\alpha$，得 $\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{m^2}=1$，即 $m^2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-m^2=0$，

$\sin^2\alpha=\frac{m^2}{1+m^2}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi$（$k\in Z$）时，$\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 同号.

而当 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$（$k\in Z$）时，$\sin\alpha$ 与 $\tan\alpha$ 异号.

所以 $\sin\alpha=\begin{cases}\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}，当 -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}+2k\pi 时（k\in Z），\\ \frac{-m}{\sqrt{1+m^2}}，当 \frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi 时（k\in Z）.\end{cases}$

（2）$2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha=\frac{2\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+\frac{1}{2}}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2m^2+\frac{1}{2}}{m^2+1}$.

【说明】　由 $\tan\alpha$ 的值求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，有一些书上利用公式$\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$，但这两个公式由三角函数的定义很容易推出，所以不用专门推导和记忆这些公式，这类问题由现有的关系式和方法均可解决.

例8 证明 $\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$.

【分析】 本题的证明方法很多，可由关系式$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$将两边的“切”化“弦”来证明，也可用比较法证明两边的差为0，或者由左$\Rightarrow$右，或由右$\Rightarrow$左，因为等式两边均为角α的三角函数，因此也可用三角函数的定义来证明.

【证法一】 左边$=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$，

$$
\begin{aligned}
\text{右边}&=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\\
&=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}\\
&=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.
\end{aligned}
$$

由左边=右边，所以原式成立.

【证法二】 因为$\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$

$$=\frac{\tan2\alpha\cdot\sin^2\alpha-(\tan^2\alpha-\sin^2\alpha)}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$=\frac{\tan^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\sin\alpha}0,$$

$$=\frac{-\tan^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}{(\tan\alpha-\sin\alpha)\cdot\tan\alpha\sin\alpha}$$

$=0,$

所以 $\dfrac{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\sin\alpha}$

【证法三】(根据三角函数定义)

设 P(x，y)是角 α 终边上的任意一点，则

$\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$,

所以 左边$=\dfrac{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{\sqrt{x+y^2}}}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x}=\dfrac{y(\sqrt{x^2+y^2}+x)}{y^2}=$

$\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$,

右边$=\dfrac{\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y}$,

左边=左边，故等式成立.

例 9 化简或求值：

（1）$\dfrac{\cos 210^\circ \cdot \cos(-420^\circ)\tan 330^\circ}{\cot 390^\circ \ \sin 750^\circ \ \cos 900^\circ}$；

（2）$\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{7\pi}{3}+3\tan^2\dfrac{11\pi}{6}-\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{17\pi}{4}}-\dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\pi}{3}$；

（3）$\sqrt{1-2\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}$（α为第三象限角）.

【分析】 解本题的关键是熟练地应用正、余弦的诱导公式和记住特殊角的三角函数值.

【解】（1）原式$=\dfrac{(-\cos 30^\circ)\cos 60^\circ\ (-\tan 30^\circ)}{\cot 30^\circ\ \sin 30^\circ\ \cos 180^\circ}$

$$=\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6};$$

（2）原式$=\dfrac{4}{3}\cos\dfrac{\pi}{3}+3\left(-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)^2-\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{\pi}{4}}-\dfrac{1}{3}\sin^2\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2\times\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{5}{12};$$

（3）原式$=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$=|\sin\alpha+\cos\alpha|$$

$=-\sin\alpha-\cos\alpha$（因为 α 为第三象限角）.

例 10 (1)若 $f(\cos x)=\cos 9x$，求 $f(\sin x)$的表达式；

(2)设$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & (x<0),\\ f(x-1)+1 & (x\geqslant 0),\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}\cos\pi x & \left(x<\frac{1}{2}\right),\\ g(x-1)-1 & \left(x\geqslant\frac{1}{2}\right),\end{cases}$

求 $g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$的值.

【分析】在(1)中理解函数符号的含义，并将 f(sin x)化成 f(cos(90°－x))是充分利用已知条件和诱导公式的关键. 在(2)中必须正确掌握分段函数求值的方法.

【解】(1) $f(\sin x)=f(\cos(90°-x))=\cos 9(90°-x)$

$=\cos(2\times 360°+90°-9x)=\cos(90°-9x)$

$=\sin 9x$；

(2) $g\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+g\left(\frac{5}{6}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+\left[f\left(\frac{1}{3}-1\right)+1\right]+\left[g\left(\frac{5}{6}-1\right)-1\right]+\left[f\left(\frac{3}{4}-1\right)+1\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+1+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-1+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

$=1$.

同角三角函数的基本关系式·典型例题分析

1．已知某角的一个三角函数值，求该角的其他三角函数值.

例1　已知$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，求α角其他三角函数值.

解　∵sinα＜0∴角α在第三或第四象限(不可能在y轴的负半轴上)

(1)若α在第三象限，则$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3}{4}$，

$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=-\frac{5}{3}$，$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=-\frac{5}{4}$

(2)若α在第四象限，则

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$，

$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=-\frac{3}{4}$，$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{3}$

$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=-\frac{5}{4}$

说明　在解决此类问题时，要注意：

(1)尽可能地确定α所在的象限，以便确定三角函数值的符号.

(2)尽可能地避免使用平方关系(在一般情况下只要使用一次).

(3)必要时进行讨论.

例 2　已知 $\sin\alpha=m(|m|\leqslant 1)$，求 $tg\alpha$ 的值.

解 (1)当 $m=0$ 时，$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$

(2)当 $m=\pm 1$ 时，α 的终边在 y 轴上，$tg\alpha$ 无意义.

(3)当 α 在Ⅰ、Ⅳ象限时，∵$\cos\alpha>0$.

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-m^2}$

从而 $tg\alpha=\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}=\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

当 α 在第Ⅱ、Ⅲ象限时，∵$\cos\alpha<0$，

$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-m^2}$，从而 $tg\alpha=\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{m^2-1}$.

说明　(1)在对角的范围进行讨论时，不可遗漏终边在坐标轴上的情况.

(2)本题在进行讨论时，为什么以 $\cos\alpha$ 的符号作为分类的标准，而不按 $\sin\alpha$ 的符号(即 m 的符号)来分类讨论呢？你能找到这里的原因并概括出所用的技巧吗？

2．三角函数式的化简

三角函数式的化简的结果应满足下述要求：

(1)函数种类尽可能地少.

(2)次数尽可能地低.

(3)项数尽可能地少.

(4)尽可能地不含分母.

(5)尽可能地将根号中的因式移到根号外面来.

化简的总思路是：尽可能地化为同类函数再化简.

例 3　化简 $\sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha+\cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

解1　原式 $=\dfrac{\sin^2\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}+2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$=\sec\alpha \cdot \csc\alpha$

解 2　原式 $=(\sin^2\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha+\sin\alpha \cdot \cos\alpha)+(\cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)$

$=\mathrm{tg}\alpha \cdot (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\mathrm{ctg}\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha}$$

$=\sec\alpha \cdot \csc\alpha$

说明　(1)在解 1 中，将正切、余切化为正弦、余弦再化简，仍然是循着减少函数种类的思路进行的.

(2)解 2 中的逆用公式将 $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ 用 $\mathrm{tg}\alpha$ 表示，较为灵活，解 1 与解 2 相比，思路更自然，因而更实用.

例 4　化简：

(1) $\sqrt{\sec^2x-2\mathrm{tg}x}\ (0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2})$；

(2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\ (\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2})$

分析　将被开方式配成完全平方式，脱去根号，进行化简.

解　(1)原式 $=\sqrt{\mathrm{tg}^2x-2\mathrm{tg}x+1}=|\mathrm{tg}x-1|$

$\because$ 当 $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4}$ 时，$\mathrm{tg}x < 1$；当 $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{tg}x \geqslant 1$

$$\therefore 原式=\begin{cases}1-tgx\ (0\leqslant x<\dfrac{\pi}{4})\\ tgx-1\ (\dfrac{\pi}{4}\leqslant x<\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$$

$$(2)原式=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}+\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\sin\theta)}}$$

$$=\frac{1-\cos\theta\ +1+\cos\theta}{|\sin\theta|}$$

$$=-2\csc\theta\ (\because \pi<\theta<\frac{3\pi}{2},\ \therefore \sin\theta<0)$$

3．三角恒等式的证明

证明三角恒等式的过程，实际上是化异为同的过程，即化去形式上的异，而呈现实质上的同，这个过程，往往是从化简开始的——这就是说，在证明三角恒等式时，我们可以从最复杂处开始．

例 5　求证 $\cos\alpha(2\sec\alpha+tg\alpha)(\sec\alpha-2tg\alpha)=2\cos\alpha-3tg\alpha$．

分析　从复杂的左边开始证得右边．

证明　左边 $=\cos\alpha(\dfrac{2}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha})(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos\alpha})$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(2+\sin\alpha)(1-2\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(2-2\sin^2\alpha-3\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}(2\cos2\alpha-3\sin\alpha)$$

$=2\cos\alpha-3tg\alpha=$右边

例 6　证明恒等式

(1) $1+3\sin^2\alpha\sec^4\alpha+tg^6\alpha=\sec^6\alpha$

(2) $(\sin A+\sec A)^3+(\cos A+\csc A)^2=(1+\sec A\csc A)^2$

分析　(1)的左、右两边均较复杂，所以可以从左、右两边同时化简

为一式，也可采用“左边-右边=0”或$\dfrac{左边}{右边}=1$”(考虑为零的情况).

证明　(1)右边-左边$=\sec^6\alpha-tg^6\alpha-3\sin^2\alpha\sec^4\alpha-1$

$=(\sec^2\alpha-tg^2\alpha)(\sec^4\alpha+\sec^2\alpha\cdot tg^2\alpha+tg^2\alpha)-3\sin^2\alpha\sec^4\alpha-1$

$=(\sec^4\alpha-2\sec^2\alpha\, tg^2\alpha+tg^2\alpha)-1$

$=(\sec^2\alpha-tg^2\alpha)^2-1=0$

∴等式成立.

$$(2)\frac{左边}{右边}=\left(\frac{\sin A+\sec A}{1+\sec A\csc A}\right)^2+\left(\frac{\cos A+\csc A}{1+\sec A\csc A}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sin^2 A\cos A+\sin A}{\sin A\cos A+1}\right)^2+\left(\frac{\sin A\cos^2 A+\cos A}{\sin A\cos A+1}\right)^2(两弦化)$$

$=\sin^2A+\cos^2A=1$ 故原式成立

在解题时，要全面地理解“繁”与“简”的关系．实际上，将不同的角化为同角，以减少角的数目，将不同的函数名称，化为同名函数，以减少函数的种类，都是化繁为简，以上两点在三角变换中有着广泛的应用.

例7　求证$\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1+tgx}{1-tgx}$

分析 1　从右端向左端变形，将“切”化为“弦”，以减少函数的种类.

$$证明\ 右边=\frac{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos-\sin x)(\cos x+\sin x)}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=左边$$

分析 2　由 1+2sinxcosx 立即想到$(\sin x+\cos x)^2$，进而可以约分，达到化简的目的.

$$\text{证明}\quad \text{左边}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{\mathrm{tg}x\cos x+\cos x}{\cos x-\mathrm{tg}x\cos x}$$

$$=\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}=\text{右边}$$

说明　(1)当题目中涉及多种名称的函数时，常常将切、割化为弦(如解法 1)，或将弦化为切(如解法 2)以减少函数的种类.

(2)要熟悉公式的各种变形，以便迅速地找到解题的突破口，请看下列.

$$\text{例8}\quad\text{求证}\quad \frac{1+\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1-\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{证明}\quad \because\text{左边}=\frac{\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha+\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$$

$$=\frac{(\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha)(\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha+1)}{1+\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$$

$=\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha$

$$=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{右边}$$

∴等式成立

说明　以上证明中采用了“1 的代换”的技巧，即将 1 用 $\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha$ 代换，可是解题者怎么会想到这种代换的呢？很可能，解题者在采用这种代换时，已经预见到代换后，分子可以因式分解，可以约分，而所有这一切都是建立在熟悉公式的各种变形的基础上的，当然，对不熟练的解题者而言，还有如下的“一般证法”——即证明“左边-右边=0”

证明

$$\text{左边}-\text{右边}=\frac{1+\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha\left(1+\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)-\left(1+\sin\alpha\right)\left(1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)}{\left(1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos\alpha}{\left(1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha\right)}=0$$

∴左边=右边

诱导公式·典型例题分析

例 1　求下列三角函数值：

(1)$\sin(-1200°)$；(2)$tg945°$；(3)$\cos\frac{47}{6}\pi$；(4)$ctg(-\frac{17\pi}{3})$

解　(1)$\sin(-1200°)=-\sin1200°=-\sin(3\times360°+120°)$

$=-\sin120°=-\sin(180°-60°)$·

$=-\sin60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)$tg945°=tg(2\times360°+225°)=tg225°=tg(108°+45°)=tg45°=1$

$$(3)\cos\frac{47}{6}\pi=\cos(6\pi+\frac{11\pi}{6})=\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}$$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(4)ctg(-\frac{17}{3}\pi)=-ctg\frac{17}{3}\pi=-ctg(6\pi-\frac{\pi}{3})=-ctg(-\frac{\pi}{3})=ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

例2　已知$\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\cos(\frac{5\pi}{6}+\alpha)-\sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})$的值.

分析　$\because(\frac{\pi}{6}-\alpha)+(\frac{5\pi}{6}+\alpha)=\pi$，因此可以把$\frac{5\pi}{6}+\alpha$化成$\pi-(\frac{\pi}{6}-\alpha)$，进而利用诱导公式求解.

解 $\because \cos(\frac{5\pi}{6}+\pi)=\cos[\pi-(\frac{\pi}{6}-\alpha)]=-\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin^2(\alpha-\frac{\pi}{6})=1-\cos^2(\frac{\pi}{6}-\alpha)=\frac{2}{3}$

$\therefore$原式$=-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

例3 化简 $\frac{\sin^2(\alpha+\pi)\cos(\pi+\alpha)\cdot \mathrm{ctg}(-\alpha+2\pi)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)\cos^3(-\alpha-\pi)}$

解 原式$=\frac{(-\sin\alpha)^2\cdot(-\cos\alpha)\cdot(-\mathrm{ctg}\alpha)}{-\mathrm{tg}\alpha\cdot(-\cos\alpha)^3}$

$=-\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha\cdot(-\cos^3\alpha)}$

$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha}$

$=\frac{\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=1$

例 4 求证

(1) $\sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$； $(n\in Z)$

(2) $\cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha$.

证明 1° 当 n 为奇数时，设 $n=2k-1(k\in Z)$

则(1) $\sin(n\pi+\alpha)=\sin[(2k-1)\pi+\alpha]$

$=\sin(-\pi+\alpha)=-\sin\alpha$

$=(-1)^n\sin\alpha$ ($\because (-1)^n=-1$)

(2) $\cos(n\pi+\alpha)=\cos[(2k-1)\pi+\alpha]=\cos(-\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$=(-1)^n\cos\alpha$

2° 当 n 为偶数时，设 $n=2k(k\in Z)$，

则(1) $\sin(n\pi+\alpha)=\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha=(-1)^n\sin\alpha$ ($\because (-1)^n=1$)

(2) $\cos(n\pi+\alpha)=\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha=(-1)^n\cos\alpha$

由 1°，2°，本题得证.

例 5　设 A、B、C 是一个三角形的三个内角，则在

① $\sin(A+B)-\sin C$　　② $\cos(A+B)+\cos C$

③ $\mathrm{tg}(A+B)+\mathrm{tg}C$　　④ $\mathrm{ctg}(A+B)-\mathrm{ctg}C$

这四个式子中，值为常数的有$(C\neq\frac{\pi}{2})$　　[　]

A. 1 个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解　由已知，$A+B+C=\pi$，$\therefore A+B=\pi-C$，故有

① $\sin(A+B)-\sin C=\sin(\pi-C)-\sin C=\sin C-\sin C=0$ 为常数.

② $\cos(A+B)+\cos C=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$ 为常数.

③ $\mathrm{tg}(A+B)+\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}(\pi-C)+\mathrm{tg}C=-\mathrm{tg}C+\mathrm{tg}C=0$ 为常数.

④ $\mathrm{ctg}(A+B)-\mathrm{ctg}C=\mathrm{ctg}(\pi-C)-\mathrm{ctg}C=-\mathrm{ctg}C-\mathrm{ctg}C=-2\mathrm{ctg}C$ 不是常数. 从而选(C).

用单位圆中的线段表示三角函数值·典型例题分析

例 1　利用三角函数线，求满足下列条件的角或角的范围.

(1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$　(2) $\mathrm{tg}\alpha=-1$　(3) $\sin\alpha<-\frac{1}{2}$　(4) $\cos\alpha\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$

解　(1)如图 2-10 过点 $(0,\frac{1}{2})$ 作x轴的平行线与单位圆交于点P，

P′，则

$\sin\angle xOP=\sin\angle xOP'=\frac{1}{2}$　$\because\angle xOP'=\frac{\pi}{6}$，$\angle xOP'=\frac{5\pi}{6}$

$\therefore$满足条件的所有角是 $\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z\}$

(2)如图 2-11，过点(1，-1)和原点作直线交单位圆于点 p 和 p′，则

op和op′就是角α的终边．$\because\angle xop=\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$，$\angle xop'=-\frac{\pi}{4}$

∴满足条件的所有角是 $\{\alpha|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{4},\ k\in Z\}$

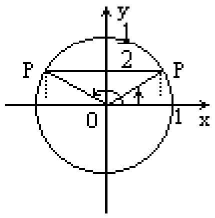

图2-10

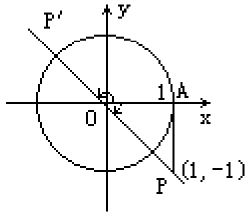

图2-11

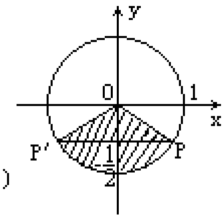

图2-12

(3)如图2-12，过点$(0,\ -\frac{1}{2})$，作x轴的平行线交单位圆于点p，p′，

则$\sin\angle xop=\sin\angle xop'=-\frac{1}{2}$，∵$\angle xop=\frac{11}{6}\pi$，$\angle xop'=\frac{7\pi}{6}$

∴满足条件的所有角是 $\{\alpha|2k\pi+\frac{7}{6}\pi<\alpha<2k\pi+\frac{11}{6}\pi,\ k\in Z\}$

(4)如图2-13，过$(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0)$作x轴的垂线与单位圆交于点P、P′，则

$\cos\angle xop=\cos\angle xop'=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而$\angle xop=\frac{\pi}{6}$，$\angle xop'=-\frac{\pi}{6}$.

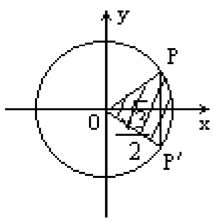

图2-13

∴满足条件的所有角是

$\{\alpha|2k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{6},\ k\in Z\}$

三角公式总表

1.L $_{弧长}$=$|\alpha|$R=$\frac{n\pi R}{180}$ S $_{扇}$=$\frac{1}{2}$LR=$\frac{1}{2}$R$^2|\alpha|$=$\frac{n\pi\cdot R^2}{360}$

2.正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=$ 2R（R 为三角形外接圆半径）

3.余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

4.$S_{\triangle}=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

（其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 为三角形内切圆半径）

5.同角关系：

⑴商的关系：① $tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\sec\theta$ ② $ctg\theta=\frac{x}{y}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cos\theta\cdot\csc\theta$

③$\sin\theta=\frac{y}{r}=\cos\theta\cdot tg\theta$　　④$\sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{1}{\cos\theta}=tg\theta\cdot\csc\theta$

⑤$\cos\theta=\frac{x}{r}=\sin\theta\cdot ctg\theta$　　⑥$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{1}{\sin\theta}=ctg\theta\cdot\sec\theta$

⑵倒数关系：$\sin\theta\cdot\csc\theta=\cos\theta\cdot\sec\theta=tg\theta\cdot ctg\theta=1$

⑶平方关系：$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sec^2\theta-tg^2\theta=\csc^2\theta-ctg^2\theta=1$

⑷$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$　（其中辅助角φ与点（a, b）在同一象限，且$tg\varphi=\frac{b}{a}$）

6.函数 y=$A\sin(\omega\cdot x+\varphi)+$k 的图象及性质：（$\omega>0,A>0$）

振幅 A，周期 T=$\frac{2\pi}{\omega}$，频率 f=$\frac{1}{T}$，相位$\omega\cdot x+\varphi$，初相φ

7.五点作图法：令$\omega x+\varphi$依次为$0\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$ 求出 x 与 y，　　依点(x,y)作图

8.诱导公试

	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi-\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$+tg\alpha$	$+ctg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$2k\pi+\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+tg\alpha$	$+ctg\alpha$

三角函数值等于α的同名三角函数值，前面加上一个把α看作锐角时，原三角函数值的符号；即：函数名不变，符号看象限

	sin	con	tg	ctg
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$+ctg\alpha$	$+tg\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+ctg\alpha$	$+tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$

三角函数值等于α的异名三角函数值，前面加上一个把α看作锐角时，原三角函数值的符号;即：函数名改变，符号看象限

9.和差角公式

①$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

②$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

③$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta}$　　④$tg\alpha\pm tg\beta=tg(\alpha\pm\beta)(1\mp tg\alpha\cdot tg\beta)$

⑤ $tg(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma-tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma}{1-tg\alpha\cdot tg\beta-tg\alpha\cdot tg\gamma-tg\beta\cdot tg\gamma}$ 其中当 A+B+C=π 时,有:

i). $tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$ ii). $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}+tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{C}{2}+tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}=1$

10.二倍角公式:(含万能公式)

① $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2tg\theta}{1+tg^2\theta}$

② $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\dfrac{1-tg^2\theta}{1+tg^2\theta}$

③ $tg2\theta=\dfrac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}$ ④ $\sin^2\theta=\dfrac{tg^2\theta}{1+tg^2\theta}=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ ⑤ $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

11.三倍角公式:

① $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)$

② $\cos 3\theta=-3\cos\theta+4\cos^3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$

③ $tg3\theta=\dfrac{3tg\theta-tg^3\theta}{1-3tg^2\theta}=tg\theta\cdot tg(60-\theta)\cdot tg(60+\theta)$

12.半角公式:(符号的选择由 $\dfrac{\theta}{2}$ 所在的象限确定)

① $\sin\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ ② $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ ③ $\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$

④ $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ ⑤ $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ ⑥ $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

⑦ $\sqrt{1\pm\sin\theta}=\sqrt{(\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2})^2}=\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\pm\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

⑧ $tg\dfrac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

13.积化和差公式:

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

14.和差化积公式:

① $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ② $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

③ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ④ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

15.反三角函数：

名称	函数式	定义域	值域	性质
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$增	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	arcsin(-x) ＝-arcsinx 奇
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$减	$[0,\pi]$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
反正切函数	$y=arctgx$	R 增	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	arctg(-x) ＝- arctgx 奇
反余切函数	$y=arcctgx$	R 减	$(0,\pi)$	$arcctg(-x)=\pi-arcctgx$

16.最简单的三角方程

方程		方程的解集
$\sin x=a$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a,k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a,k\in Z\}$
$\cos x=a$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arccos a,k\in Z\}$
	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=2k\pi\pm\arccos a,k\in Z\}$
$tgx=a$		$\{x\mid x=k\pi+arctga,k\in Z\}$
$ctgx=a$		$\{x\mid x=k\pi+arcctga,k\in Z\}$

正弦函数、余弦函数的图象和性质·典型例题分析

例 1　用五点法作下列函数的图象

(1) y=2-sinx，x∈[0，2π]

(2) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$，$x\in[-\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{6}]$

解　(1)(图 2-14)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
u=sinx	0	1	0	-1	0
y=2-u	2	1	2	3	2

(2)(图 2-15)

$u=x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
y=cosu	1	0	-1	0	1

描点法作图：

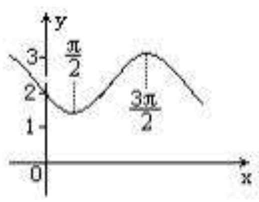

图2-14

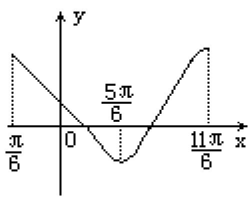

图2-15

例 2　求下列函数的定义域和值域.

(1)$y=\lg\sin x$；　(2)$y=2\sqrt{\cos 3x}$.

解　(1)要使 lgsinx 有意义，必须且只须 sinx＞0，解之，

得　$2k\pi<x<(2k+1)\pi$，$k\in Z$.

又∵$0<\sin x\leqslant 1$，∴$-\infty<\lg\sin x\leqslant 0$.

∴定义域为$(2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in Z)$，值域为$(-\infty,0]$.

(2)要使$2\sqrt{\cos 3x}$有意义，必须且只须$\cos 3x\geqslant 0$，解之，得

$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 3x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

即$\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

又∵此时$0\leqslant\cos 3x\leqslant 1$，故$0\leqslant 2\sqrt{\cos 3x}\leqslant 2$.

∴定义域为$[\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6},\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}](k\in Z)$，值域为$[0,2]$.

例3　已知函数$y=f(x)$的定义域是$[0,\ \frac{1}{4}]$，求下列函数的定义域.

(1)$f(\cos^2 x)$；　(2)$f(\sin^2 x-\frac{1}{2})$.

分析 分别把$\cos^2 x$，$\sin^2 x-\frac{1}{2}$整体地看成$f(x)$的自变量，求出它们的取值范围，进而再利用三角函数线或函数图象，求出 x 的取值范围。

解 (1)依题意，有$0\leqslant\cos^2 x\leqslant\frac{1}{4}$.

解得 $-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$

利用单位圆(或三角函数图象)解得

$\{x|k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\in Z\}$

(2)由读者自己完成，其结果为

$x\in[k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\pi+\frac{\pi}{3}]\cup[k\pi+\frac{2\pi}{3},\ k\pi+\frac{3\pi}{4}]\ (k\in Z)$

例 4　求下列函数的最大值与最小值：

(1)$y=2-\sin(x-\frac{\pi}{4})$；　(2)$y=2\cos^2 x+5\sin x-4$；

(3)$y=3\cos^2 x-4\cos x+1$，$x\in[\frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi]$.

解 (1)当$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k\in Z)$时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})$取最大值1，从而$y_{min}=1$.

当$x-\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in Z)$时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})$取最小值$-1$，从而$y_{max}=3$.

(2) $y=2\cos^2x+5\sin x-4=-2\sin^2x+5\sin x-2$

$=-2(\sin x-\frac{5}{4})^2+\frac{9}{8}$

∵ $\sin x\in[-1,1]$，

∴当 $\sin x=-1$，即 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$ 时，y 有最小值 -9

当 $\sin x=1$，即 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$ 时，y 有最大值 1.

(3) $y=3\cos^2x-4\cos x+1=3(\cos x-\frac{2}{3})^2-\frac{1}{3}$

∵ $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，$\cos x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (借助单调性即得)

从而当 $\cos x=-\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，$y_{max}=\frac{15}{4}$；

当 $\cos x=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$y_{min}=-\frac{1}{4}$.

例 5　求下列函数的值域.

(1) $y=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$　(2) $y=\frac{2\sin x\cdot\cos^2x}{1+\sin x}$

解(1)由 $y=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$，可得 $(1-2y)\cos x=y(y\neq\frac{1}{2})$

∴ $\cos x=\frac{y}{1-2y}$

∵ $|\cos x|\leqslant1$　∴ $\cos^2x\leqslant1$

即 $\frac{y^2}{(1-2y)^2}\leqslant1$. 从而 $3y^2-4y+1\geqslant0$

∴ $y\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $y\geqslant1$

故函数 $y=\frac{\cos x}{2\cos x+1}$ 的值域为 $(-\infty,\frac{1}{3}]\cup[1,+\infty)$

说明　上面解法的实质是从已知关系式中，利用$|\cos x|\leqslant 1$消去x，从而求出y的范围.

$$(2)y=\frac{2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{1+\sin x}=2\sin x(1-\sin x)=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$

$\because -1<\sin x\leqslant 1\quad \therefore -4<y\leqslant \frac{1}{2}$

$\therefore$ 函数 $y=\dfrac{2\sin x\cos^2 x}{1+\sin x}$ 的值域为 $(-4,\ \frac{1}{2}]$

例6　比较下列各组数的大小.

(1) $\sin 194°$ 与 $\cos 160°$，(2) $\cos\frac{3}{2}$，$\sin\frac{1}{10}$，$-\cos\frac{7}{4}$.

(3) $\sin(\sin\frac{3\pi}{8})$，$\sin(\cos\frac{3\pi}{8})$

分析　化为同名函数，进而利用增减性来比较函数值的大小.

解　(1) $\sin 194°=\sin(180°+14°)=-\sin 14°$

$\cos 160°=\cos(180°-20°)=-\cos 20°=-\sin 70°$

$\because 0<14°<70°<90°$，

$\therefore \sin 14°<\sin 70°$，从而 $-\sin 14°>-\sin 70°$，即

$\sin 194°>\cos 160°$.

(2) $\because \sin\frac{1}{10}=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10})=\cos 1.47\cdots$，

$=-\cos\frac{7}{4}=(\pi-\frac{7}{4})=\cos 1.39$，

$\cos\frac{3}{2}=\cos 1.5$

而 $y=\cos x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上是减函数，

故由 $0<1.39<1.47<1.5<\pi$ 可得

$\cos 1.5<\cos 1.47<\cos 1.39$

即$\cos\frac{3}{2}<\sin\frac{1}{10}<-\cos\frac{7}{4}$.

(3)$\because \cos\frac{3}{8}\pi=\sin\frac{\pi}{8}$，$\therefore 0<\cos\frac{3}{8}\pi<\sin\frac{3\pi}{8}<1$

而$y=\sin x$在(0，1)内递增，$\therefore \sin(\cos\frac{3\pi}{8})<\sin(\sin\frac{3\pi}{8})$.

例 7　求下列函数的单调区间

(1)$y=\cos 2x$，　(2)$y=2\sin(\frac{\pi}{4}-x)$

解(1)设 u=2x

当 u∈[(2k-1)π，2kπ](k∈Z)时，cosu 递增；

当 u∈[2kπ，(2k+1)π](k∈Z)时，cosu 递减.

$\therefore y=\cos 2x$的递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{2}，k\pi](k\in Z)$

递减区间为$[k\pi，k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in Z)$

(2)$y=2\sin(\frac{\pi}{4}-\pi)=-2\sin(x-\frac{\pi}{4})$.

同样令$u=x-\frac{\pi}{4}$.

$\therefore y=-2\sin(x-\frac{\pi}{4})$的递增区间为$[2k\pi+\frac{3\pi}{4}，2k\pi+\frac{7\pi}{4}](k\in Z)$

递减区间为$[2k\pi-\frac{\pi}{4}，2k\pi+\frac{3\pi}{4}](k\in Z)$.

例 8　下列函数中是奇函数的为

A．$y=\frac{x^2+\cos x}{x^2-\cos x}$；　　B．$y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$；

C．$y=2^{\cos x}$；　　D．$y=\lg(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$.

解 $\because \lg[\sin(-x)+\sqrt{1+\sin^2(-x)}]$

$$=\lg(\sqrt{1+\sin^2x}-\sin x)=\lg\frac{(1+\sin^2x)-\sin^2x}{\sqrt{1+\sin^2x}+\sin x}$$

$$=\lg(\sin x+\sqrt{1+\sin^2x})^{-1}=-\lg(\sin x+\sqrt{1+\sin^2x}),$$

又$\because$当$x\in R$时，均有$\sin x+\sqrt{1+\sin^2x}>0$(为什么？)

$\therefore$(D)为奇函数，应选(D).

例9 试判断函数$f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}$在下列区间上的奇偶性.

(1)$x\in(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2})$； (2)$x\in[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]$

解 (1)$\because f(x)=\dfrac{(1+\sin x-\cos x)(1+\cos x-\sin x)}{(1+\cos x+\sin x)(1+\cos x-\sin x)}$

$$=\frac{1-(\cos x-\sin x)^2}{(1+\cos x)^2-\sin^2x}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos x+\cos^2x-\sin^2x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$\therefore f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{1+\cos(-x)}=-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

因此，在$(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2})$内，$f(-x)=-f(x)$，

$\therefore$此函数在$(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2})$内是奇函数.

(2)由于$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$f(x)=1$，而$f(-x)$无意义，因此在$[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}]$上，

函数不具有奇偶性.

说明 奇(偶)函数的定义域必须对称于原点，这是奇(偶)函数必须满足的条件，解题时不可忽视.

是

函数 y=Asin(wx+j)的图象·典型例题分析

例 1　已知函数 y=f(x)，将 f(x)的图象上的每一点的纵坐标保持不变，

横坐标扩大到原来2倍．然后把所到的图形沿x轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位．这样得到的曲线与 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象相同，那么，已知函数 $y=f(x)$ 的解析式

是

[　　　]

A．$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})$ C．$f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$

B．$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ D．$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})$

分析　对函数$y=\frac{1}{2}\sin x$的图象作相反的变换，寻求应有的结论．

解　把$y=\frac{1}{2}\sin x$图像沿x轴向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位，得到解析式为$y=\frac{1}{2}\sin(x-\frac{\pi}{2})$的函数图象；再像它的图象上各点的纵坐标不变，横坐标缩小到原来的$\frac{2}{3}$倍，就得到解析式为$y=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{2})$的函数图象，这个

结果与 D 相同，故选 D.

例 2

(1)函数$f(x)=2\cos(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$的增区间为______；

(2)函数$f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$的增区间为______；

(3)函数 f(x)=lg(sin2x)的增区间为______；

(4)函数 f(x)=|sinx|的增区间为______.

分析　基本方法是转化为 y=sinx 与 y=cosx 的单调区间的求法．但既要注意定义域，还要注意复合函数的单调性质的运用．

解 (1)$\because 2k\pi+\pi\leqslant\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+2\pi$，

$\therefore 4k\pi+\frac{8\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{14\pi}{3}$ $(k\in Z)$

$\therefore$ f(x)的增区间为$[4k\pi+\frac{8\pi}{3}，4k\pi+\frac{14\pi}{3}]$ $(k\in Z)$.

(2)∵$f(x)=-\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，且sinx减区间为$[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ $(k\in Z)$.

∴$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，

∴$k\pi+\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8}$ $(k\in Z)$

∴f(x)增区间为$[k\pi+\frac{3\pi}{8}，k\pi+\frac{7\pi}{8}]$ $(k\in Z)$.

(3)∵$\sin 2x>0$，∴$2k\pi<2x<2k\pi+\pi$．∴$k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$.

∵sin2x在$(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{4}]$ $(k\in Z)$．)∴ f(x)的增区间为$(k\pi，k\pi+\frac{\pi}{4}]$ $(k\in Z)$.

(4)作出图象，由图可知f(x)的增区间为$[k\pi，k\pi+\frac{\pi}{2}]$ $(k\in Z)$.

例3 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的同一周期内有最高点$(\frac{\pi}{12}，3)$，最低点$(\frac{7\pi}{12}，-5)$，求解析式.

解　2A=3-(-5)=8，A=4

$2b=3+(-5)=-2$，$b=-1$，$\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，$T=\pi$

$y=4\sin(2x+\varphi)-1$过$(\frac{\pi}{12}，3)$

∴$3=4\sin(2x+\varphi)-1$，$\sin(2x+\varphi)=1$ ∴$2x+\varphi=\frac{\pi}{2}$

即 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$　∴$y=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$.

评析 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ ($A>0$，$\omega>0$)$x\in R$的图象是先把$y=\sin x$图象上所有点向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<$)平移$|\varphi|$个单位，再把所得点的横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变)，再把

所得点的纵坐标伸长(A＞1)或缩短(0＜A＜1)到原来的 A 倍.(横坐标不变)再将图象上所有点向上 b＞0 或向下 b＜0 平移|b|个单位，同一周

期内最高点与相邻的最低点的自变量的差为$\frac{T}{2}$，函数值差的绝对值为$2|A|$，从而确定解析式$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$.

正切函数、余切函数的图象和性质·典型例题分析

例1 求函数$y=tg\frac{2\pi}{3}$的周期.

解 $T=\frac{\pi}{\frac{2}{3}}=\frac{3\pi}{2}$

例 2 比较下列各组数的大小

①tg1，tg2，tg3

②$ctg(-\frac{13\pi}{7})$，$ctg\frac{9\pi}{8}$

解 (1)∵tg2=tg(2-π)，tg3=tg(3-π)

又∵$\frac{\pi}{2}<2<\pi$ ∴$-\frac{\pi}{2}<2-\pi<\frac{\pi}{2}$

∵$\frac{\pi}{2}<3<\pi$ ∴$-\frac{\pi}{2}<3-\pi<\frac{\pi}{2}$

显然$-\frac{\pi}{2}<2-\pi<3-\pi<1<\frac{\pi}{2}$，而$y=tgx$在$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$内是增函数

∴tg(2-π)<tg(3-π)<tg1 即 tg2<tg3<1

(2)∵$ctg(-\frac{13\pi}{7})=ctg(-2\pi+\frac{\pi}{7})=ctg\frac{\pi}{7}$

$ctg(\frac{9\pi}{8})=ctg(\pi+\frac{\pi}{8})=ctg\frac{\pi}{8}$

且$0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{7}<\pi$

由于 y=ctgx 在(0，π)内是减函数，所以

$ctg\frac{\pi}{8}>ctg\frac{\pi}{7}$

即$ctg\frac{9\pi}{8}>ctg\left(-\frac{13\pi}{7}\right)$

已知三角函数值求角·典型例题分析

例1　已知$\text{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，且$\alpha$是第二象限的角，求角$\alpha$的集合.

解 先求出符合条件$\text{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$的锐角$\alpha=\frac{\pi}{3}$

在90°～180°之间满足条件的角为$\frac{2\pi}{3}$

∴所求角集为$|\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in Z|$

例2 已知$\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=1$，求$\sin(2\alpha+\beta)$的值.

分析 由$\sin(\alpha+\beta)=1$得$\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，而$2\alpha+\beta=$

$2(\alpha+\beta)-\beta=4k\pi+\pi-\beta$，$k\in Z$，从而$\sin(2\alpha+\beta)$与$\sin\beta$之间的联系被发现.

解 因为$\sin(\alpha+\beta)=1$，所以$\alpha+\beta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

故　$\sin(2\alpha+\beta)=\sin[2(\alpha+\beta)-\beta]$

$\sin(4k\pi+\pi-\beta)=\sin(\pi-\beta)$

$=\sin\beta=\frac{1}{3}$

全章小结

一、本章主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数的概念，同角三角函数之间的关系，诱导公式，以及三角函数的图象和性质．

二、根据生产实际和进一步学习数学的需要，我们引入了任意大小的正、负角的概念，采用弧度制来度量角，实际上是在角的集合与实数的集合 R 之间建立了这样的一一对应关系：每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应．采用弧度制时，弧长公式十分简单：$l=|\alpha|r$(l 为弧长，r 为半径，α 为圆弧所对圆心角的弧度数)，这就使一些与弧长有关的公式(如扇形面积公式等)得到了简化．

三、在角的概念推广后，我们定义了任意用的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割的六种三角函数．它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数．由于角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，三角函数可以看成是以实数为自变量的函数．

四、同角三角函数的八个基本关系或是进行三角恒等变换的重要基础，它们在化简三角函数式和证明三角恒等式等问题中要经常用到，必须熟记，并能熟练运用．

五、掌握了五组诱导公式以后，就可以把任意用的三角函数化成 $0°\sim 90°$ 间角的三角函数．

六、利用正弦线、余弦线可以比较精确地作出正弦函数、余弦函数的图象．可以看出，因长度为一个周期的闭区间上有五个点(即函数值最大和最小的点以及函数值为零的点)在确定正弦函数、余弦函数图象的形状时起着关键的作用．

高考真题选讲

题 1　(’98)已知点 $P(\sin\alpha-\cos\alpha，\mathrm{tg}\alpha)$在第一象限，则在$[0，2\pi]$内 α 的取值范围是 [　　　　]

A. $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\pi,\ \frac{5\pi}{4}\right)$

B. $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\ \frac{5\pi}{4}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2}\right)$

D. $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\ \pi\right)$

分析 点P在第一象限，满足$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha>0\\ \mathrm{tg}\,\alpha>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha>\cos\alpha\\ \mathrm{tg}\,\alpha>0\end{cases}$，

即$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$或$\pi<\alpha<\frac{5\pi}{4}$

答案：B

题 2 （’98）sin600° 的值是

[ ]

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

题3（’93，上海）函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{2})$的图象的一条对称轴的方程

是

[ ]

A. $x=-\frac{\pi}{2}$

B. $x=-\frac{\pi}{4}$

C. $x=\frac{\pi}{8}$

D. $x=\pi$

分析 令$2x+\frac{\pi}{2}=k\pi\,(k\in Z)$，则$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\,(k\in Z)$

当$k=0$时，$x=-\frac{\pi}{4}$或化简得$y=-\sin 2x$，画出图象观察得解.

答案：B

题4 （'97)函数$y=tg(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi)$在一个周期内的图象是 [ ]

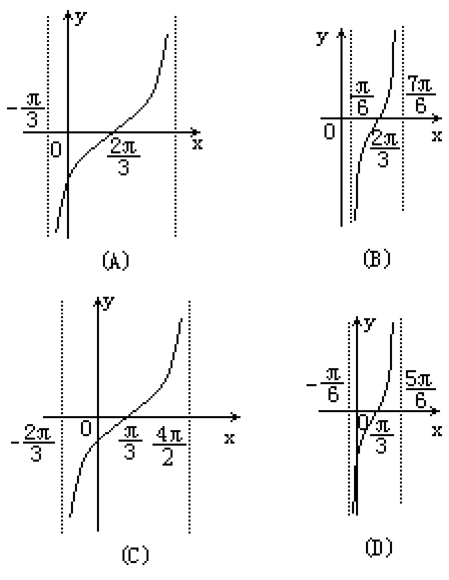

图2-20

分析 $y=tg\frac{1}{2}(x-\frac{2\pi}{3})$的图象可由$y=tg\frac{1}{2}x$的图象右移$\frac{2\pi}{3}$得到

答案：A

题5（’98)关于函数$f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})(x\in R)$，有下列命题：

①由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 可得 x_1-x_2 必是 π 的整数倍；

②$y=f(x)$的表达式可改写为$y=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$；

③$y=f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{6}，0)$对称；

④$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称.

其中正确的命题的序号是______

分析 ①取特值$x_1=\frac{\pi}{3}$，$x_2=-\frac{\pi}{6}$，有$f(x_1)=f(x_2)=0$但$x_1-x_2=\frac{\pi}{2}$，

不是 π 的整数倍，所以①不正确.

②$\because f(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})=4\cos[\frac{\pi}{2}-(2x+\frac{\pi}{3})]=4\cos(2x-\frac{\pi}{6})$

∴②正确.

③画出$y=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象可知$y=f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{6}，0)$对称或将$(-\frac{\pi}{6}，0)$代入$y=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．故③正确.

④将$x=-\frac{\pi}{6}$代入$y=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$．可知$x=-\frac{\pi}{6}$不是其图象对称轴，

故④不正确.

答案：②③

题6（’96，上海)在下列区间中，函数$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$单调增区间

是

[　　　]

A. $[\frac{\pi}{2}，\pi]$

B. $[0，\frac{\pi}{4}]$

C. [－π，0]

D. $[\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}]$

答案：B

题 7　(’94)设θ是第二象限的角，则必有
[　　　]

A. $tg\frac{\theta}{2} > ctg\frac{\theta}{2}$

B. $tg\frac{\theta}{2} < cgt\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2} > \cos\frac{\theta}{2}$

D. $\sin\frac{\theta}{2} < \cos\frac{\theta}{2}$

分析 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta < 2k\pi + \pi (k \in Z)$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$$

答案：A

题 8　(’95 文)，使 sinx≤cosx，成立的 x 的一个变化区间是　　　　　[　　　]

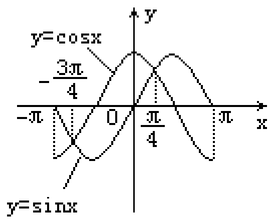

图2-21

A. $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$　　D. $[0, \pi]$

分析　先确定使$\sin x=\cos x$成立的x值，$x=k\pi+\frac{\pi}{4}$，($k\in Z$)，再用单位圆(或图象)在$[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$内按已知不等式讨论得解.

答案：A

题 9　(’97 文)满足 $tg\alpha \geqslant ctg\alpha$ 的角α的一个取值区间是　[　　]

A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$　　B. $[0, \frac{\pi}{4}]$

C. $[0, \frac{\pi}{4}]$　　D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

分析　由单位圆知答案.

答案：A

题10 (’90)函数$y=\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|tgx|}{tgx}+\frac{ctgx}{|ctgx|}$的值是　[　　]

A. {-2，4}

B. {-2，0，4}

C. {-2，0，2，4}

D. {-4，-2，0，4}

分析 函数的定义域是 $\{x|x\neq\frac{k\pi}{2}，k\in Z\}$ ，当x分别在第一、二、

三、四象限取值时，对应的函数值分别是 4，-2，0，-2.

答案：B

题 11 （’99)若 f(x)sinx 是周期为π的奇函数，则 f(x)可以是 [ ]

A. sinx
B. cosx

C. sin2x
D. cos2x

答案：B

题12 (’99)若sinα＞tgα＞ctgα $(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2})$，则α∈

[ ]

A. $\left(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{4}\right)$

B. $(-\frac{\pi}{4}，0)$

C. $(0，\frac{\pi}{4})$

D. $\left(\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{2}\right)$

答案：B

题13 函数$f(x)=M\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在区间[a，b]上是增函数，且$f(a)=-M$，$f(b)=M$，则函数$g(x)=M\cos(\omega x+\varphi)$在[a，b]上 [ ]

A．增函数

B．是减函数

C．可以取最大值 M

D．可以取最小值-M

答案：C