三角函数最值问题的几种常见解法

三角函数是重要的数学运算工具，三角函数最值问题是三角函数中的基本内容，也是高中数学中经常涉及的问题。这部分内容是一个难点，它对三角函数的恒等变形能力及综合应用要求较高。解决这一类问题的基本途径，同求解其他函数最值一样，一方面应充分利用三角函数自身的特殊性（如有界性等），另一方面还要注意将求解三角函数最值问题转化为求一些我们所熟知的函数（二次函数等）最值问题。下面就介绍几种常见的求三角函数最值的方法：

一 配方法

若函数表达式中只含有正弦函数或余弦函数，切它们次数是 2 时，一般就需要通过配方或换元将给定的函数化归为二次函数的最值问题来处理。

例 1 函数 $y=-\sin^2 x-3\cos x+3$ 的最小值为（　）.

A.　2　　B．0　　C．$-\dfrac{1}{4}$　　D．6

[分析]本题可通过公式 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ 将函数表达式化为 $y=\cos^2 x-3\cos x+2$，因含有 cosx 的二次式，可换元，令 cosx=t，则 $-1\le t\le 1, y=t^2-3t+2,$ 配方，得 $y=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4},$　$\because -1\le t\le 1, \therefore$ 当 t=1 时,即 cosx=1 时，$y_{\min}=0$,选 B.

例 2 求函数 y=5sinx+cos2x 的最值

[分　析] ：观察三角函数名和角，其中一个为正弦，一个为余弦，角分别是单角和倍角，所以先化简，使三角函数的名和角达到统一。

$$y=5\sin x+\left(1-2\sin^2 x\right)=-2\sin^2 x+5\sin x+1=-2\left(\sin x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$$

$$\because -1\le \sin x\le 1, \therefore \sin x=-1, x=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in z, y_{\min}=-2\times\frac{81}{16}+\frac{33}{8}=-6$$

$$\sin x=1 \therefore x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z, y_{\max}=-2\times\frac{1}{16}+\frac{33}{8}=4$$

二 引入辅助角法

例 3 已知函数 $y=\dfrac{1}{2}\cos^2 x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1\left(x\in R\right)$ 当函数 y 取得最大值时，求自变量 x 的集合。

[分析] 此类问题为$y=a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x$的三角函数求最值问题，它可通过降次化简整理为$y=a\sin x+b\cos x$型求解。

解：

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2}+1=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)+\frac{5}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{5}{4},\therefore 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\therefore x=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in z),y_{\max}=\frac{7}{4}.$$

三 利用三角函数的有界性

在三角函数中，正弦函数与余弦函数具有一个最基本也是最重要的特征——有界性，利用正弦函数与余弦函数的有界性是求解三角函数最值的最基本方法。

例 4 求函数$y=\dfrac{2\cos x+1}{2\cos x-1}$的值域

[分析] 此为$y=\dfrac{a\cos x+b}{c\cos x-d}$型的三角函数求最值问题，分子、分母的三角函数同名、同角，这类三角函数一般先化为部分分式，再利用三角函数的有界性去解。或者也可先用反解法，再用三角函数的有界性去解。

解法一：原函数变形为$y=1+\dfrac{2}{2\cos x-1},\because |\cos x|\le 1$，可直接得到：$y\ge 3$或$y\le\dfrac{1}{3}.$

解法一：原函数变形为$\cos x=\dfrac{y+1}{2(y-1)},\because |\cos x|\le 1,\therefore\left|\dfrac{y+1}{2(y-1)}\right|\le 1,\therefore\ y\ge 3$或$y\le\dfrac{1}{3}.$

例 5 （2003 年高考题）已知函数$f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)$，求函数 f(x)的最小正周期和最大值。

[分析] 在本题的函数表达式中，既含有正弦函数，又有余弦函数，并且含有它们的二次式，故需设法通过降次化二次为一次式，再化为只含有正弦函数或余弦函数的表达式。

解：$f(x)=2\sin^2 x+2\sin x\cos x=1-\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}sn\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore$ f(x)的最小正周期为π，最大值为$1+\sqrt{2}$。

四 引入参数法（换元法）

对于表达式中同时含有 sinx$\pm$cosx，与 sinxcosx 的函数，运用关系式 $(\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm 2\sin x\cos x,$ 一般都可采用换元法转化为 t 的二次函数去求最值，但必须要注意换元后新变量的取值范围。

例 6 求函数 y=sinx+cosx+sinxcosx 的最大值。

[分析] 解：$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x.$ 令 sinx+cosx=t，则

$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}\left(t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\right), \therefore y = \frac{t^2-1}{2} + t$，其中 $t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

当 $t = \sqrt{2}, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \therefore y_{\max} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$

五 利用基本不等式法

利用基本不等式求函数的最值，要合理的拆添项，凑常数，同时要注意等号成立的条件，否则会陷入误区。

例 7 求函数 $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x}$ 的最值。

解：$y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x} = 1 + \cot^2 x + 4\left(1 + \tan^2 x\right) = 5 + \cot^2 x + 4\tan^2 x \geq 5 + 2 \times 2 = 9$

当且仅当 $\cot^2 x = 4\tan^2 x,$ 即 $\cot x = \pm\sqrt{2}$ 时，等号成立，故 $y_{\min} = 9$。

六 利用函数在区间内的单调性

例 8 已知 $x \in (0, \pi)$，求函数 $y = \sin x + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值。

[分析] 此题为 $\sin x + \frac{a}{\sin x}$ 型三角函数求最值问题，当 sinx>0,a>1，不能用均值不等式求最值，适合用函数在区间内的单调性来求解。

设 $\sin x = t, (0 < t \leq 1), y = t + \frac{1}{t}$，在（0，1）上为减函数，当 t=1 时，$y_{\min} = 3$。

七 数形结合

由于$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以从图形考虑，点(cosx,sinx)在单位圆上，这样对一类既含有正弦函数，又含有余弦函数的三角函数的最值问题可考虑用几何方法求得。

例 9 求函数$y=\dfrac{-\sin x}{2-\cos x}(0<x<\pi)$的最小值。

[分析] 法一：将表达式改写成$y=\dfrac{0-\sin x}{2-\cos x}$,y 可看成连接两点 A(2,0)与点(cosx,sinx)的直线的斜率。由于点(cosx,sinx)的轨迹是单位圆的上半圆（如图），所以求 y 的最小值就是在这个半圆上求一点，使得相应的直线斜率最小。

设过点 A 的切线与半圆相切与点 B,则$k_{AB}\le y<0.$

可求得$k_{AB}=\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

所以 y 的最小值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（此时$x=\dfrac{\pi}{3}$）.

法二：该题也可利用关系式 asinx+bcosx=$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$（即引入辅助角法）和有界性来求解。

八 判别式法

例 10 求函数$y=\dfrac{\sec^2 x-\tan x}{\sec^2 x+\tan x}$的最值。

[分析] 同一变量分子、分母最高次数齐次，常用判别式法和常数分离法。

$$y=\frac{\sec^2 x-\tan x}{\sec^2 x+\tan x}=\frac{\tan^2 x-\tan x+1}{\tan^2 x+\tan x+1}$$

解：$\therefore (y-1)\tan^2 x+(y+1)\tan x+(y-1)=0$

$\therefore y=1,\tan x=0,x=k\pi(k\in\pi)$

$y\neq 1$时此时一元二次方程总有实数解

$\therefore \Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2 \geq 0, \therefore (3y-1)(y-3) \leq 0$

$\therefore \frac{1}{3} \leq y \leq 3.$

由 y=3，tanx=-1，$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{4}(k \in z), y_{\max}=3$

由 $y=\frac{1}{3}, \tan x=1, \therefore x=k\pi+\frac{\pi}{4}, y_{\min}=\frac{1}{3}.$

九 分类讨论法

含参数的三角函数的值域问题，需要对参数进行讨论。

例 11 设 $f(x)=-\cos^2 x+a\sin x-\frac{a}{4}-\frac{1}{2}\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$，用 a 表示 f(x)的最大值 M(a).

解：$f(x)=-\sin^2 x+a\sin x-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}$.令 sinx=t,则 $0 \leq t \leq 1,$

$$g(t)=f(x)=-t^2+at-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}.$$

（1） 当 $\frac{a}{2} \geq 1$，即 $a \geq 2, g(t)$在[0，1]上递增，$M(a)=g(1)=\frac{3a}{4}-\frac{1}{2};$

（2） 当 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1,$ 即 $0 \leq a \leq 2$ 时，$g(t)$ 在 [0，1] 上先增后减，

$$M(a)=g\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2};$$

（3） 当 $\frac{a}{2} \leq 0,$ 即 $a \leq 0, g(t)$在[0，1]上递减，$M(a)=g(0)=\frac{1}{2}-\frac{a}{4}.$

$$\therefore M(a)=\begin{cases}\frac{3a}{4}-\frac{1}{2}, a \geq 2 \\ \frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}, 0 \leq a \leq 2 \\ \frac{1}{2}-\frac{a}{4}, a \leq 0\end{cases}$$

以上几种方法中又以配方法和辅助角法及利用三角函数的有界性解题最为常见。解决这类问题最关键的在于对三角函数的灵活应用及抓住题目关键和本质所在。

三角函数最值与值域专题

三角函数的最值问题是高考的一个重要内容,要求掌握求三角函数最值的常见方法。

类型一： 利用$|\sin x|\le 1$,$|\cos x|\le 1$这一有界性求最值。

例 1： 求函数 $y=\dfrac{\sin x-1}{2-\sin x}$ 的值域。

解：由 $y=\dfrac{\sin x-1}{2-\sin x}$ 变形为 $(y+1)\sin x=2y+1$，知 $y\ne -1$，则有 $\sin x=\dfrac{2y+1}{y+1}$，

$|\sin x|=|\dfrac{2y+1}{y+1}|\le 1 \Rightarrow |\dfrac{2y+1}{y+1}|^2\le 1\Rightarrow (2y+1)^2\le (y+1)^2 \Rightarrow -\dfrac{2}{3}\le y\le 0$

，则此函数的值域是 $y\in[-\dfrac{2}{3},0]$

例 2, 若函数 $y=a\cos x+b$ 的最大值是 1，最小值是 -7，求 a,b

$a>0, a+b=1, -a+b=-7\Rightarrow a=4$，$b=-3$

$a<0, -a+b=1, a+b=-7\Rightarrow a=-4, b=-3$

练习：1，求函数 $y=\dfrac{1-\cos x}{3+\cos x}$ 的值域（$-\infty,-3]\cup[1$，$+\infty$）

2,函数 $y=\sin x$ 的定义域为[a，b]，值域为$[-1,\dfrac{1}{2}]$，则 b-a 的最大值和最小值之和为 b

A．$\dfrac{4\pi}{3}$ B．2π C．$\dfrac{8\pi}{3}$ D．4π

类型二： $y=a\sin x+b\cos x$ 型。此类型通常可以可化为 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}(x+\varphi)$ 求其最值（或值域）。

例 1： 求函数 $y=3\sin x+4\cos x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 的最值。

解：

$$y=3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\varphi),\cos\varphi=\frac{3}{5},\sin\varphi=\frac{4}{5}$$

$$x+\varphi\in(\varphi,\frac{\pi}{2}+\varphi), y\in(3,5]$$

2,求函数 $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})+\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$（$x\in R$）的最值。

解法： $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})+\cos(x-\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{2}\sin[(x-\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\pi}{4}]=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{12})$，∴函数的最大值为$\sqrt{2}$，最小值为$-\sqrt{2}$。

练习：1,函数 y=3sin(x+20°）+5sin(x+80°）的最大值是： （ c ） A、$5\frac{1}{2}$ B、$6\frac{1}{2}$ C、7 D、8

2, 已知函数 $f(x)=\sin 2x$，$g(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，直线 $x=t$（$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$）与函数 $f(x)$、$g(x)$ 的图像分别交于 M、 N 两点，则｜MN｜的最大值是__$\sqrt{3}$__.

类型三：$y=a\sin^2 x+b\sin x+c(a\neq 0)$型。此类型可化为$y=at^2+bt+c(a\neq 0)$在区间$[-1,1]$上的最值问题。

例 1：求函数$y=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x+1$（$x\in R$）的最值

解：$y=1-\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1=-(\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+\dfrac{9}{4}$

$\therefore$函数的最大值为$\dfrac{9}{4}$，最小值为$\dfrac{5-2\sqrt{3}}{4}$

例 2：求函数$y=\cos^2 x+\sqrt{3}a\sin x+1$（$a\in R$，$x\in R$）的最大值。

解：$y=\cos^2 x+\sqrt{3}a\sin x+1$转化为$y=-\sin^2 x+\sqrt{3}a\sin x+2$配方得：

$y=-(\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)^2+\dfrac{3}{4}a^2+2$

①当$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a>1$，即$a>\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，在 *sinx*=1，$y_{\max}=\sqrt{3}a+1$

②当$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a<-1$时，即$a<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，在 *sinx*=−1，$y_{\max}=-\sqrt{3}a+1$

③当$-1\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\leq 1$，即$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leq a\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时，在$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$时，$y_{\max}=\dfrac{3}{4}a^2+2$

综上：$y_{\max}=\begin{cases}\sqrt{3}a+1(a>\dfrac{2\sqrt{3}}{3})\\ \dfrac{3}{4}a^2+2(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\leq a\leq\dfrac{2\sqrt{3}}{3})\\ -\sqrt{3}a+1(a<-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})\end{cases}$

练习：函数$f(x)=\sin^2 x+2\cos x$在区间$[-\frac{2}{3}\pi,\theta]$上的最大值为1,则θ的值是 d

A．0B．$\frac{\pi}{3}$C．$\frac{\pi}{2}$D．—$\frac{\pi}{2}$

类型四： $y=a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c(a\neq 0)$ 型。

例：求函数 $f(x)=5\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}\sin^2 x-4\sin x\cos x(\frac{\pi}{4}<x\le\frac{7\pi}{24})$ 的最值，并求取得最值时 x 的值。

解： $f(x)=5\sqrt{3}\frac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\frac{1-\cos 2x}{2}-2\sin 2x$

$=2\sqrt{3}\cos 3x-2\sin 2x+3\sqrt{3}$

$=4\cos(2x+\frac{\pi}{6})+3\sqrt{3}$

$\because \frac{\pi}{4}<x\le\frac{7\pi}{24}$， $\therefore \frac{2\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{4}$， $\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos(2x+\frac{\pi}{6}<)-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$，此时 $x=\frac{7\pi}{24}$， $f(x)$ 无最大值。

练习：已知： $y=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1,\ x\in R,$ 求 y 的最大值及此时 x 的集合.

解： $\because y=\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1=\frac{1+\cos 2x}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+1=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$， $\therefore$ 当 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=1$ 时， $y_{\max}=\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$. 此时， $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$.

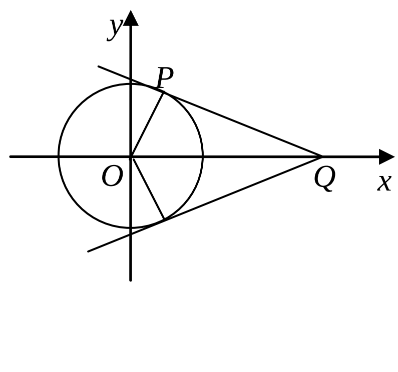
所以 y 的最大值为 $\frac{7}{4}$，此时 x 的集合为 $\{x\mid x=k\pi+\frac{\pi}{6}，k\in Z\}$.

类型五： $f(x)=\frac{a\sin x+b}{c\cos x+d}$ 型。此类型最值问题可考虑如下几种解法：①转化为 $a\sin x+b\cos x=c$ 再利用辅助角公式求其最值；②采用数形结合法（转化为斜率问题）求最值。

例：求函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 的值域。

解法 1：将函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 变形为 $y\cos x-\sin x=2y$， $\therefore \sin(x+\phi)=\frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}$ 由 $|\sin(x+\phi)|=\frac{|2y|}{\sqrt{1+y^2}}\le 1\Rightarrow(2y)^2\le 1+y^2$，解得： $-\frac{\sqrt{3}}{3}\le y\le\frac{\sqrt{3}}{3}$，故值域是 $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$

解法 2：数形结合法：求原函数的值域等价于求单位圆上的点 P(*cosx*, *sinx*) 与定点 Q(2, 0)所确定的直线的斜率的范围。作出如图得图象，当过 Q 点的直线与单位圆相切时得斜率便是函数 $y=\frac{\sin x}{\cos x-2}$ 得最值，由几何知识，易求得过 Q 的两切线得斜率分别为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$。结合图形可知，此函数



的值域是$[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$。

练习：求函数$f(\theta)=\frac{2\sin\theta-2}{\cos\theta-3}$的最值。

$\frac{y}{2}=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta-3}$ ∴y/2 即为单位圆上的点(cosθ，sinθ)与定点(3，1)连线的斜率，由数形结合可知 y/2∈[0，3/4]，∴ y∈[0，3/2]

类型六：含有$\sin x\pm\cos x$与$\sin x\cdot\cos x$的最值问题。解此类型最值问题通常令$t=\sin x\pm\cos x$，$t^2=1\pm2\sin x\cdot\cos x$，$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$，再进一步转化为二次函数在区间上的最值问题。

例：求函数$y=\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x$的最大值并指出当 x 为何值时，取得最大值。

解法 1：设 *t=sinx+cosx*，则$t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$ $\therefore t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ $\therefore \sin x\cos x=\frac{1}{2}(t^2-1)$

$\therefore y=\frac{1}{2}(t^2-1)+t=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$ $\quad y_{max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$。

解法 2：$y=\sin x\cdot\cos x+\sin x+\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，

$x+\frac{\pi}{4}=\theta\Rightarrow x=\theta-\frac{\pi}{4}$，

$y=\frac{1}{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})+\sqrt{2}\sin\theta=-\frac{1}{2}\cos2\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sin^2\theta+\sqrt{2}\sin\theta-\frac{1}{2}$

$y_{\max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$

练习：1, 求函数$y=(\sin x-2)(\cos x-2)$的最大、最小值.

解：原函数可化为：$y=\sin x\cos x-2(\sin x+\cos x)+4$，令$\sin x+\cos x=t(|t|\le\sqrt{2})$，则$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$，$\therefore y=\frac{t^2-1}{2}-2t+4=\frac{1}{2}(t-2)^2+\frac{3}{2}$.

$\because$ $t=2\notin[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且函数在$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$上为减函数，$\therefore$ 当 $t=\sqrt{2}$ 时，即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$时，$y_{\min}=\frac{9}{2}-2\sqrt{2}$；当$t=-\sqrt{2}$时，即$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}(k\in Z)$时，$y_{\max}=\frac{9}{2}+2\sqrt{2}$.

2,函数$f(x)=\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的值域是 dA. $\left[-\sqrt{2}-1,1\right]\cup\left[-1,\sqrt{2}-1\right]$B. $\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2},\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$

C. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right]$D. $\left[-\frac{\sqrt{2}+1}{2},-1\right)\cup\left(-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$

类型七：$y=a\sin x+\dfrac{b}{\sin x}(0<x<\pi)$型（转化为对号函数）函数最值问题。

例：求函数$y=\dfrac{1-\sin x}{2-2\sin x+\sin^2 x}$的最大、最小值

$y=\dfrac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2+1}=\dfrac{1}{1-\sin x+\dfrac{1}{1-\sin x}}$ ∵1－sinx≥0

∴ y≥0，当 sinx=1 时 $Y_{min}=0$，当 1－sinx>0 时，1－sinx+$\dfrac{1}{1-\sin x}$≥2， $y_{max}=1/2$

已知$\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{3}$，则函数$y=\dfrac{2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\cos x}$的最大值与最小值的和为 ___$5+\sqrt{3}$___.

当$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时,函数$f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x\sin x-\sin^2 x}$的最小值 4

练习：1,已知$x\in(0,\pi)$，求函数$y=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}$的最大值;

2,当$0<x<\dfrac{\pi}{2}$时，函数$f(x)=\dfrac{1-\cos 2x+8\cos^2 x}{\sin 2x}$的最小值为_________4

$$f(x)=\frac{1-\cos 2x+8\cos^2 x}{\sin 2x}=\frac{2\sin^2 x+8\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\tan x+\frac{4}{\tan x}$$

$\tan x\in(0,+\infty),\ f(x)\in[4,+\infty)$

类型八：条件最值问题。

例 1：已知$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，求$y=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$的取值范围。

解：$\because 3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，$\therefore \sin^2\beta=-\dfrac{3}{2}\sin^2\alpha+\sin\alpha$

$$\because 0\le\sin^2\beta\le1\ \therefore\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\sin^2\alpha+\sin\alpha\ge0\\-\dfrac{3}{2}\sin^2\alpha+\sin\alpha\le1\end{cases}\text{解得}0\le\sin\alpha\le\frac{2}{3}$$

$$\because y=\sin^2\alpha+\sin^2\beta=-\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\sin\alpha=-\frac{1}{2}(\sin\alpha-1)^2+\frac{1}{2}\quad\backslash$$

$\because 0\le\sin\alpha\le\dfrac{2}{3}\ \therefore$ sinα =0 时，$y_{\min}=0$； $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$时，$y_{\max}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore 0\le\sin^2\alpha+\sin^2\beta\le\dfrac{4}{9}$。

2,$\sin x\cos y=\dfrac{2}{3}$,则$\cos x\sin y$的取值_________

设 $\cos x\sin y=t$

$$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)=\frac{2}{3}+t\in[-1,1]$$

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)=\frac{2}{3}-t\in[-1,1]$$

$$t\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$$

练习：1,已知 Sinx+Siny=$\frac{1}{3}$，求 Siny—$\cos^2$x 的最大值 $\frac{4}{9}$

2,已知 $\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因式 cos$x$+cos$y$ 的最大值为

A．2 B．0 C．$\frac{\sqrt{14}}{14}$ D．$\frac{\sqrt{14}}{2}$ D

$$\cos x+\cos y=t,\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=2+2\cos(x-y)=t^2+\frac{1}{2}$$

$$t^2-\frac{3}{2}\in[-2,2],t\in[-\frac{\sqrt{14}}{2},\frac{\sqrt{14}}{2}]$$

类型九：其他问题

例 1：函数 $y=x\cos x-\sin x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 的最小值为________

$$y=x\cos x-\sin x\Rightarrow y'=-x\sin x=0,x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$$

$$x=\pi,x\in[\frac{\pi}{2},\pi),y'>0;x\in(\pi,\frac{3\pi}{2}],y'<0$$

$$y_{\max}=-\pi$$

2,求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的最大值和最小值，
并指出当 x 分别为何值时取到最大值和最小值。

解：∵定义域为 0≤x≤1，可设 $x=\cos^2 x$ 且 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$1-x=1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\therefore y=\sqrt{\cos^2\theta}+\sqrt{\sin^2\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

$\because 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{\pi}{4}\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le1$ 即 $1\le y\le\sqrt{2}$

$\therefore$ 当 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，即 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{2}$（此时 x=1 或 x=0），y=1；

当 $\theta+\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，（此时 $x=\frac{1}{2}$）， $y=\sqrt{2}$，

当 x=0 或 x=1 时，y 有最小值 1；当 $x=\frac{1}{2}$ 时，y 有最大值 $\sqrt{2}$ 。

练习：1,求 $y=\sin x\cos 2x$， $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 的最大值。

$$y=\sin x\cos 2x=-2\sin^3 x+\sin x, x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

设 $\sin x=t\in[0,1], y=-2t^3+t, y^{'}=-6t^2+1=0$

$$t=\frac{\sqrt{6}}{6}, t\in[0,\frac{\sqrt{6}}{6}), y^{'}>0; t\in(\frac{\sqrt{6}}{6},1], y^{'}<0$$

$$y_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

2 若不等式 $\sqrt{\tan x}-\sqrt{\tan x-1}>a$， $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 的解集非空，则参数 a 的取值范围为____________.

令 $\tan x=m$，则 $m\in$R，$\therefore$ 原不等式化为 $a<\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 即 $a<\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}$ 而易知 $\sqrt{m}+\sqrt{m-1}$ 的最小值为 1． $\therefore a<1$.

三角函数最值问题的几种常见类型

三角函数的最值问题是三角函数基础知识的综合应用，近几年的高考题中经常出现。其出现的形式，或者是在小题中单纯地考察三角函数的值域问题；或者是隐含在解答题中，作为解决解答题所用的知识点之一；或者在解决某一问题时，应用三角函数有界性会使问题更易于解决（比如参数方程）。题目给出的三角关系式往往比较复杂，进行化简后，再进行归纳，主要有以下几种类型。掌握这几种类型后，几乎所有的三角函数最值问题都可以解决。

1．y=asinx+bcosx 型的函数

特点是含有正余弦函数，并且是一次式。解决此类问题的指导思想是把正、余弦函数转化为只有一种三角函数。应用课本中现成的公式即可：y= $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$，其中 $\tan\phi=\frac{b}{a}$

例 1 已知函数 $f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期；
(2)求 $f(x)$的最小值及取得最小值时相应的 x 的值；
(3)若当 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$时，$f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)$，求 $f^{-1}(1)$的值.

解：(1)$f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x$

$=2\cos x(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x$

$=2\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

∴$f(x)$的最小正周期 $T=\pi$

(2)当 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\frac{5\pi}{12}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$f(x)$取得最小值-2.

(3)令 $2\sin(2x+\frac{\pi}{3})=1$，又 $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{2}]$，

∴$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}]$，∴$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，则

$x=\frac{\pi}{4}$，故 $f^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

2．$y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+\cos^2x$ 型的函数。

特点是含有 sinx, cosx 的二次式，处理方式是降幂，再化为型 1 的形式来解。

例 2．求 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$ 的最小值，并求出 y 取最小值时的 x 的集合。

解：$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)+\sin 2x+2\cos^2x=1+\sin 2x+1+\cos 2x$

$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

当 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$ 时，y 取最小值 $2-\sqrt{2}$，此时 x 的集合$\{x|x=k\pi-\frac{3}{8}\pi, k\in Z\}$.

3．$y=a\sin^2x+b\cos x+c$ 型的函数

特点是含有 sinx, cosx，并且其中一个是二次，处理方式是应用 $\sin^2x+\cos^2x=1$,使函数式只含有一种三角函数，再应用换元法，转化成二次函数来求解。

例 3 是否存在实数 a，使得函数 $y=\sin^2x+a\cdot\cos x+\frac{5}{8}a-\frac{3}{2}$在闭区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值是 1？若存在，求出对应的 a 值；若不存在，试说明理由.

$.解: y=1-\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{8}a-\frac{3}{2}=-(\cos x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}+\frac{5}{8}a-\frac{1}{2}.$

当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时,$0\le\cos x\le 1.$

若$\frac{a}{2}>1$时,即$a>2$,则当$\cos x=1$时,$y_{\max}=a+\frac{5}{8}a-\frac{3}{2}=1$

$\Rightarrow a=\frac{20}{13}<2$(舍去),

若$0\le\frac{a}{2}\le 1$,即$0\le a\le 2$,则当$\cos x=\frac{a}{2}$时,$y_{\max}=\frac{a^2}{4}+\frac{5}{8}a-\frac{1}{2}=1$

$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$或$a=-4<0$(舍去).

若$\frac{a}{2}<0$,即$a<0$,则当$\cos x=0$时,$y_{\max}=\frac{5}{8}a-\frac{1}{2}=1\Rightarrow a=\frac{12}{5}>$(舍去)

综合上述知，存在$a=\frac{3}{2}$符合题设

4．y=$\frac{a\sin x+c}{b\cos x+d}$型的函数

特点是一个分式，分子、分母分别会有正、余弦的一次式。几乎所有的分式型都可以通过分子，分母的化简，最后整理成这个形式，它的处理方式有多种。

例 4．求函数 y=$\frac{2-\sin x}{2-\cos x}$的最大值和最小值。

解法 1：原解析式即：sinx-ycosx=2-2y, 即 sin(x+φ)=$\frac{2-2y}{\sqrt{1+y^2}}$，

∵ |sin(x+φ)|≤1, ∴ $\frac{|2-2y|}{\sqrt{1+y^2}}$≤1，解出 y 的范围即可。

解法 2：$\frac{2-\sin x}{2-\cos x}$表示的是过点(2, 2)与点(cosx, sinx)的斜率，而点(cosx, sinx)是单位圆上的点，观察图形可以得出在直线与圆相切时取极值。

解法 3：应用万能公式设 t=tg($\frac{x}{2}$)　　则 y=$\frac{2t^2-2t+2}{3t^2+1}$，即(2-3y)t^2-2t+2-y=0

根据Δ≥0 解出 y 的最值即可。

5．y=sinxcos2x 型的函数。

它的特点是关于 sinx，cosx 的三次式（cos2x 是 cosx 的二次式）。因为高中数学不涉及三次函数的最值问题，故几乎所有的三次式的最值问题（不只是在三角）都用均值不等式来解（没有其它的方法）。但需要注意是否符合应用的条件（既然题目让你求，多半是符合使用条件的，但做题不能少这一步），及等号是否能取得。

例 6 如右图，在半径为 R 的圆桌的正中央上空挂一盏电灯，桌子边缘一点处的照度和灯光射到桌子边缘的光线与桌面的夹角 θ 的正弦成正比，角和这一点到光源的距离 r 的平方成反比，即 $I=k\cdot\dfrac{\sin\theta}{r^2}$，其中 k 是一个和灯光强度有关的常数，那么怎样选择电灯悬挂的高度 h，才能使桌子边缘处最亮？

解：$R=r\cos\theta$，由此得：$\dfrac{1}{r}=\dfrac{\cos\theta}{R},0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

$$I=k\cdot\frac{\sin\theta}{r^2}=k\cdot\frac{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{R^2}=\frac{k}{R^2}\cdot(\sin\theta\cdot\cos^2\theta)$$

$$2I^2=(\frac{k}{R^2})^2\cdot 2\sin^2\theta\cdot(1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)\le(\frac{k}{R^2})^2\cdot(\frac{2}{3})^3$$

$$\text{由此得}I\le\frac{k}{R^2}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3},\text{等号在}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{时成立},\text{此时}h=R\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}R$$

注：本题的角和函数很难统一，并且还会出现次数太高的问题。

6．含有 sinx 与 cosx 的和与积型的函数式。

其特点是含有或经过化简整理后出现 sinx+cosx 与 sinxcosx 的式子，处理方式是应用 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$ 进行转化，变成二次函数的问题。

例 6．求 y=2sinxcosx+sinx+cosx 的最大值。

解：令 sinx+cosx=t,($-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$)，则 $1+2\sin x\cos x=t^2$，所以 $2\sin x\cos x=t^2-1$,

所以 $y=t^2-1+t=(t+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{5}{4}$.

根据二次函数的图象，解出 y 的最大值是 1+$\sqrt{2}$ 。